Crochet de Poisson

1 définition : le crochet de poisson

Les variables canoniques $(q_i)_{i=1\ldots n}$ et leurs moments conjugués $(p_i)_{i=1\ldots n}$

$$\{A,B\} \;=\; \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} \;-\; \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i} \right]$$

Le crochet de Poisson est antisymétrique : $\{A,B\} \;=\; -\,\{B,A\}$

Le crochet de Poisson apporte une structure d'algèbre à l'ensemble des observables, qui en mécanique classique sont des fonctions sur l'espace des phases :

$\{A,B+C\} = \{A,B\} + \{A,C\}$,

$\{\alpha A, \beta B\} = \alpha\beta\{A,B\}$.

Le crochet de Poisson satisfait à l'identité de Jacobi :

$\{A,\{B,C\}\} \;+\; \{B,\{C,A\}\} \;+\; \{C,\{A,B\}\} \;=\; 0$

$\{A,BC\} \;=\; \{A,B\}C \;+\; \{A,C\}B$

$$\{q_j,q_k\} \;= 0$$

$$\{q_j,p_k\} \;=\; \delta_k^j$$

$$\{p_j,p_k\} \;= 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\{A,B\} \;= \left\{\frac{\partial A}{\partial t}, B\right\} + \left\{A, \frac{\partial B}{\partial t}\right\}$$

2 hamiltonien

Soit $H(q_i,p_i)$ le hamiltonien du système considéré.

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} = \{q_j, H\}$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} = \{p_j, H\}$$

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} \;=\; \frac{\partial A}{\partial t} \;+\; \{A,H\}$$

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} \;=\; \frac{\partial H}{\partial t}$$

$$\frac{d}{dt}\{A,B\} \;=\; \frac{\partial}{\partial t}\{A,B\} \;+\; \{\{A,B\},H\}$$

3 Quantification canonique

L'intérêt du crochet de Poisson est qu'il permet de passer facilement à la quantification dans le formalisme algébrique de Heisenberg de la mécanique quantique.

Il suffit en général de faire une substitution :

$$\{X,Y\} \;\to\; \frac{1}{i\hbar}\,[\widehat{X},\widehat{Y}]$$

Crochet de Poisson sur wikipedia