multiplicateur de lagrange

1 On veut extrémiser une fonction $f(\overrightarrow{x})$ sous la contrainte $g(\overrightarrow{x}) = 0$

On écrit alors $L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, \dots, x_n) + \lambda g(x_1, \dots, x_n)$

λ est le multiplicateur de lagrange.

On va chercher $X_0 = (x_1, \dots, x_n)_0$ pour avoir dL=0.

$$
\begin{aligned}
dL = & \quad 0 && (1)\\
\Leftrightarrow \quad (\tfrac{\partial f}{\partial x_1} + \lambda \tfrac{\partial g}{\partial x_1})dx_1 + \ldots + (\tfrac{\partial f}{\partial x_n} + \lambda \tfrac{\partial g}{\partial x_n})dx_n + g(x)d\lambda = & \quad 0 && (2)\\
\Leftrightarrow \quad & \begin{cases} \tfrac{\partial f}{\partial x_1}(X_0) + \lambda \tfrac{\partial g}{\partial x_1}(X_0) & = 0 \\ \vdots & \\ \tfrac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) + \lambda \tfrac{\partial g}{\partial x_n}(X_0) & = 0 \\ g(X_0) & = 0 \end{cases} && (3)
\end{aligned}
$$

2 exemple

Quel est le rectangle de périmètre extrémum pour une aire A_0 donné ?

$f(x) = 2(a + b); g(x) = ab - A_0$

$L(a, b, \lambda) = f(a, b) + \lambda g(a, b)$

$$
\begin{aligned}
dL = & \quad 0 && (4)\\
\Leftrightarrow (\frac{\partial f}{\partial a} + \lambda \frac{\partial g}{\partial a})da + (\frac{\partial f}{\partial b} + \lambda \frac{\partial g}{\partial b})db + g(a, b)d\lambda = & \quad 0 && (5)\\
& && (6)
\end{aligned}
$$

$$
\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial a} + \lambda \frac{\partial g}{\partial a} & = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial b} + \lambda \frac{\partial g}{\partial b} & = 0 \\ g(a, b) & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 + b\lambda & = 0 \\ 2 + a\lambda & = 0 \\ ab & = A_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda & = -\frac{2}{b} \\ 2 - \frac{2a}{b} & = 0 \\ ab & = A_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = \sqrt{A_0} \\ \lambda = -\frac{2}{\sqrt{A_0}} \end{cases} \qquad (7)
$$

Il s'agit d'un carré.