

Table des matières

0.1 •	i
I LA PHYSIQUE DE L'ESPACE-TEMPS	5
1 géomérodynamique en bref	7
1.1 L'espace-temps sans et avec des coordonnées	7
1.2 apesanteur	7
1.3 Géométrie de Lorentz locale avec et sans coordonnées	7
1.4 temps	7
1.5 courbure	7
1.6 Effet de la matière sur la géométrie	7
II LA PHYSIQUE DANS UN ESPACE-TEMPS PLAT	9
2 les fondations de la relativité restreinte	11
2.1 vue d'ensemble	11
2.2 objets géométriques	11
2.3 vecteurs	11
2.4 le tenseur métrique	11
2.5 formes différentielles	11
2.6 gradients et dérivées directionnelles	11
2.7 représentation en coordonnées des objets géométriques	11
2.8 le centrifuge et le photon	11
2.9 transformations de Lorentz	11
2.10 collisions	11
3 voir dans Version 1.1	13
4 Electromagnétisme et formes différentielles	15
4.1 Calcul extérieur	15
4.2 forme électromagnétique et force de Lorentz	19
4.3 Les formes éclairent l'électromagnétisme, et l'électromagnétisme éclaire les formes	21
4.4 Champs de radiation	22
4.5 Équations de Maxwell	23
5 Le tenseur Energie-Impulsion et les lois de conservation	25
5.1 Track 1 revue	25
5.2 volumes en 3 dimensions de définition du tenseur énergie-impulsion	25
5.3 composantes du tenseur Energie-Impulsion	25
5.4 tenseur Energie-Impulsion pour un swarm ?? de particules	25
5.5 tenseur Energie-Impulsion pour un fluide parfait	25
5.6 tenseur Energie-Impulsion électromagnétique	25
5.7 symétrie du tenseur Energie-Impulsion	25

5.8	Conservation du 4-moment : formule intégrale	25
5.9	Conservation du 4-moment : formule différentielle	25
5.10	exemple d'application de $\nabla \bullet T = 0$	25
5.11	moment angulaire	25
6	Les observateurs accélérés	27
6.1	•	27
6.2	•	27
6.3	•	27
6.4	•	27
6.5	•	27
6.6	•	27
6.7	•	27
6.8	•	27
7	Incompatibilité de la gravité de la relativité restreinte	29
7.1	•	29
7.2	•	29
7.3	le décalage vers le rouge gravitationnel impose à l'espace-temps d'être courbé	29
7.4	•	31
7.5	•	31
III	LES MATHÉMATIQUES DE L'ESPACE-TEMPS COURBE	33
8	Géométrie différentielle : une présentation	35
8.1	Une présentation de la partie III	35
8.2	Track 1 contre track 2 : différence de perspective et de puissance	35
8.3	3 aspects de la géométrie : en images, abstraite, en terme de composantes	35
8.4	Algèbre tensorielle en espace-temps courbé	36
8.5	Transport parallèle, dérivée covariante, coefficients de connexion, géodésiques	36
8.6	Repère de Lorentz local : discussion mathématique	36
8.7	Déviations géodésiques et le tenseur de courbure de Riemann	36
9	Topologie différentielle	37
9.1	objets géométriques dans un espace-temps avec metric-free geodesic-free	37
9.2	"vecteur" et "dérivée directionnelle" raffiné en vecteur tangent	37
9.3	bases, composantes, et lois de transformation pour les vecteurs	37
9.4	1-formes	37
9.5	tenseurs	37
9.6	commutateurs et techniques picturales	37
9.7	variétés et topologie différentielle	37
10	Géométrie affine : géodésiques, transport parallèle et dérivée covariante	39
10.1	géodésiques et le principe d'équivalence	39
10.2	transport parallèle et dérivées covariantes : approche picturale	39
10.3	transport parallèle et dérivées covariantes : approche abstraite	40
10.4	transport parallèle et dérivées covariantes : approche en composante	40
10.5	équation géodésique	40
11	Déviations géodésiques et courbure d'espace-temps	41
11.1	courbure, enfin	41
11.2	accélération relative des géodésiques environnantes	41
11.3	forces gravitationnelles de marée et tenseur de courbure de Riemann	42
11.4	transport parallèle autour d'une courbe fermée	44

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	3
11.4.1 cas particulier	45
11.4.2 cas général	45
11.5 la planéité est équivalente à une courbure de Riemann nulle	45
11.6 coordonnées normales de Riemann	46
12 La gravité newtonienne dans le langage de l'espace-temps courbé	47
12.1 gravité newtonienne en bref	47
12.2 stratification de l'espace-temps newtonien	47
12.3 systèmes de coordonnées galiléennes	47
12.4 formulation géométrique sans coordonnées de la gravité newtonienne	47
12.5 la vision géométrique de la physique : une critique	47
13 La géométrie riemaniene : la métrique comme fondation de tout	49
13.1 nouvelles caractéristiques imposées sur la géométrie par la validité locale de la relativité spéciale	49
13.2 métrique	50
13.3 accord entre les géodésiques de la géométrie de l'espace-temps courbé et les lignes droites de la géométrie de lorentz locale	50
13.4 géodésiques comme lignes d'univers du temps propre extrême	50
13.5 propriétés de Riemann induites par la géométrie	51
13.6 Le repère propre de référence d'un observateur accéléré	52
14 calcul de la courbure	53
14.1 la courbure comme outil pour comprendre la physique	53
14.2 en formant le tenseur d'einstein	54
14.3 calcul plus efficace	54
14.4 la méthode lagrangienne géodésique??	54
14.5 les 2-formes de la courbure	54
14.6 calcul de la courbure en utilisant les formes différentielles extérieures	54
15 IDENTITES DE BIANCHI ET LA FRONTIERE DE LA FRONTIERE	55
15.0.1 Les identités de Bianchi en bref	55
15.0.2 L'identité de Bianchi $dR = 0$ comme une manifestation de 'la frontière de la frontière = 0"	56
15.0.3 moment de rotation : la clé des identités de bianchi contractées	56
15.0.4 calcul du moment de rotation	56
15.0.5 conservation du moment de rotation [..]	56
15.0.6 conservation du moment de rotation exprimé en forme différentielle	56
15.0.7 de la conservation du moment de rotation à la géomérodynamique d'Einstein : une??	56
IV LA THEORIE GEOMETRIQUE DE LA GRAVITATION D'EINSTEIN	57
16 Principe d'équivalence et mesure du "champ gravitationnel"	59
16.1 vue d'ensemble	59
16.2 les lois de la physique dans un espace-temps courbé	59
17 Comment la masse-énergie génère la courbe	61
17.1 conservation automatique de la source comme idée centrale dans la formulation de l'équation du champ	61
17.2 conservation automatique de la source : une nécessité dynamique	61
17.3 constante cosmologique	61
17.4 la limite newtonienne	61
17.5 théorie axiomatique d'Einstein	61
17.6 "aucune géométrie préalable" : une caractéristique distinguant la théorie d'Einstein d'autres théories de la gravité	61
17.7 un goût de l'histoire de l'équation d'Einstein	61

18 Champs gravitationnels faibles	63
18.1 la théorie de la gravité linéarisée	63
18.2 ondes gravitationnelles	66
18.3 effet de la gravité sur la matière	66
18.4 champs gravitationnels à peu près newtonien	67
19 Masse et moment angulaire d'un système gravitationnel	69
19.1 champ externe d'une source faible gravitante	69
19.2 mesure de la masse et du moment angulaire	69
19.3 masse et moment angulaire de sources entièrement relativistes	69
19.4 masse et moment angulaire d'un univers fermé	69
20 Lois de conservation du 4-momentum et du moment angulaire	71
20.1 •	71
20.2 •	71
20.3 •	71
20.4 •	71
20.5 •	71
20.6 20.6	71
21 PRINCIPE DE VARIATION ET ...	73
21.1 La dynamique nécessite initial-value data	73
21.2 LE PRINCIPE D'ACTION DE HILBERT ET LA METHODE DE VARIATION DE PALATINI	77
21.3 3 aspects de la géométrie : en images, abstraite, en terme de composantes	81
21.4 Algèbre tensorielle en espace-temps courbé	81
21.5 Transport parallèle, dérivée covariante, coefficients de connexion, géodésiques	81
21.6 Repère de Lorentz local : discussion mathématique	81
21.7 Déviation géodésique et le tenseur de courbure de riemann	81
22 Thermodynamique, hydrodynamique, électrodynamique, optique géométrique et théorie cinétique	83
22.1 le pourquoi de ce chapitre	83
22.2 thermodynamique en espace-temps courbé	83
22.3 hydrodynamique en espace-temps courbé	83
22.4 électrodynamique en espace-temps courbé	83
22.5 optique géométrique en espace-temps courbé	83
22.6 théorie cinétique en espace-temps courbé	83
V ETOILES RELATIVISTES	85
23 Etoiles sphériques	87
23.1 prologue	87
23.2 coordonnées et métrique pour un système sphérique statique	87
23.3 interprétation physique des coordonnées de Schwarzschild	87
23.4 description de la matière à l'intérieur d'une étoile	88
23.5 équations de structure	88
23.6 champ gravitationnel externe	89
23.6.1 aa	89
24 Pulsars et étoiles à neutrons ; quasars et étoiles supermassives	91
24.1 vue d'ensemble	91
24.2 le point final de l'évolution stellaire	91
24.3 pulsars	91
24.4 étoiles supermassives et instabilités stellaires	91

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	5
24.5 quasars et explosions dans un noyau galactique	91
24.6 groupes d'étoiles relativistes	91
25 Le "pic dans le potentiel" comme ?? du déplacement en géométrie de Schwarzschild	93
25.1 Des lois de Kepler au potentiel effectif pour le déplacement dans la géométrie de Schwarzschild . . .	93
25.2 symétries et lois de conservation	94
25.3 quantités conservées pour le déplacement en géométrie de Schwarzschild	94
25.4 déplacement vers le rouge gravitationnel	94
25.5 orbites des particules	94
25.6 orbite d'un photon, neutrino, ou graviton en géométrie de Schwarzschild	94
25.7 groupe d'étoiles sphériques	94
26 Pulsations stellaires	95
26.1 MOTIVATION	95
26.2 préparer le problème	95
26.2.1 configuration d'équilibre	95
26.2.2 coordonnées pour une configuration perturbée	95
26.2.3 les fonctions de perturbation	95
26.2.4 Equations d'évolution	96
26.3 PERTURBATIONS EULERIENNES CONTRE PERTURBATIONS LAGRANGIENNES	96
26.4 EQUATIONS AUX VALEURS INITIALES	96
26.5 EQUATION DE LA DYNAMIQUE ET CONDITIONS AUX BORNES	96
26.6 RESUME DES RESULTATS	96
VI L'UNIVERS	97
27 Cosmologies idéalisées	99
27.1 l'homogénéité et l'isotropie de l'univers	99
27.2 contenu stress-énergie de l'univers - l'idéalisation du fluide	99
27.3 implications géométriques de l'homogénéité et l'isotropie	99
27.4 comoving. système de coordonnées synchrone pour l'univers	99
27.5 le facteur d'expansion	99
27.6 3-géométrie possible pour une hypersurface d'homogénéité	99
27.7 équations du déplacement pour le fluide	99
27.8 les équations de champ d'Einstein	99
27.9 paramètres de temps et constante de Hubble	99
27.10 la cosmologie élémentaire de Friedmann d'un univers fermé	99
27.11 modèles d'univers homogènes et isotropiques qui viole la conception d'Einstein de la cosmologie . . .	99
28 Evolution de l'univers jusqu'à son état présent	101
28.1 le modèle standard de l'univers	101
28.2 le modèle standard modifié pour le chaos primordial	101
28.3 Qu'est-ce qui a précédé la singularité initiale	101
28.4 autres théories cosmologiques	101
29 Etat présent et évolution de l'univers	103
29.1 paramètres qui déterminent le destin de l'univers	103
29.2 décalage vers le rouge cosmologique	103
29.3 la relation distance-décalage vers le rouge : mesure de la constante de Hubble	103
29.4 la relation magnitude-décalage vers le rouge : mesure du paramètre de décélération	103
29.5 recherche de "l'effet lentille" de l'univers	103
29.6 densité de l'univers aujourd'hui	103
29.7 résumé de la connaissance actuelle à propos des paramètres cosmologiques	103

30 Cosmologies anisotropiques et inhomogènes	105
30.1 pourquoi l'univers est-il si homogène et isotropique?	105
30.2 Le modèle Kasner pour un univers anisotropique	105
30.3 refroidissement adiabatique de l'anisotropie	105
30.4 dissipation visqueuse de l'anisotropie	105
30.5 création de particule dans l'univers anisotropique	105
30.6 cosmologies inhomogènes	105
30.7 l'univers mixmaster	105
30.8 les horizons et l'isotropie de l'arrière plan microonde	105
VII EFFONDREMENT GRAVITATIONNEL ET TROUS NOIRS	107
31 Géométrie de Schwarzschild	109
31.1 inévitabilité de l'effondrement des étoiles massives	109
31.2 la non singularité du rayon gravitationnel	109
31.3 comportement des coordonnées de Schwarzschild à $r = 2M$	111
31.4 plusieurs systèmes de coordonnées se comportant convenablement	111
31.5 relation entre les coordonnées de Kruskal-Szekeres et les coordonnées de Schwarzschild	112
31.6 dynamique de la géométrie de Schwarzschild	112
32 Effondrement gravitationnel	113
32.1 pertinence de la géométrie de Schwarzschild	113
32.2 théorème de Birkhoff	113
32.3 géométrie extérieure d'une étoile s'effondrant	113
32.4 effondrement d'une étoile avec une densité uniforme et une pression nulle	113
32.5 effondrement symétrique sphérique avec des forces de pression interne	113
32.6 le sort d'un homme qui tombe dans la singularité à $r = 0$	113
32.7 effondrement gravitationnel réaliste - une vue d'ensemble	116
33 TROUS NOIRS	117
33.1 POURQUOI "TROU NOIR"	117
33.2 Les champs gravitationnels et électromagnétiques d'un trou noir	117
33.3 Masse, moment angulaire, charge et moment magnétique	117
33.4 Symétries et glissement de repères	117
33.5 Congruences??	117
33.6 Stockage et enlèvement de l'énergie	117
33.7 Transformations Réversibles et irréversibles	117
33.7.1 Symétries et glissement de repères	117
33.7.2 Le résultat	117
34 Techniques globales, horizons et théorèmes de singularité	119
34.1 techniques globales contre techniques locales	119
34.2 "infinité" dans un espace-temps asymptotiquement plat	119
34.3 causalité et horizons	119
34.4 structure globale des horizons	119
34.5 preuve de la seconde loi de la dynamique des trous noirs	119
34.6 théorèmes de singularité et le "problème de l'état final"	119
VIII ONDES GRAVITATIONNELLES	121
35 Propagation des ondes gravitationnelles	123
35.1 points de vue	123
35.2 revue de "théorie linéarisée" dans le vide	123

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	7
35.3 solutions d'onde plane dans une théorie linéarisée	123
35.4 la gauge transverse sans trace (TT)	123
35.5 déviation géodésique dans une onde gravitationnelle linéarisée	123
35.6 la polarisation d'une onde plane	123
35.7 le stress-énergie apporté par une onde gravitationnelle	123
35.8 ondes gravitationnelles dans une théorie complète de la relativité générale	123
35.9 une solution exacte de type onde plane	123
35.10 propriétés physiques d'une onde plane exacte	123
35.11 comparaison d'une exacte onde plane électromagnétique avec une onde plane gravitationnelle	123
35.12 un nouveau point de vue sur une onde plane exacte	123
35.13 l'approximation ondes courtes	123
35.14 effet de la courbure d'arrière plan sur la propagation des ondes	123
35.15 tenseur stress-énergie pour les ondes gravitationnelles	123
36 Génération d'ondes gravitationnelles	125
36.1 la nature quadrupolaire des ondes gravitationnelles	125
36.2 puissance rayonnée en terme de flux de puissance interne	126
36.3 générateurs en laboratoire des ondes gravitationnelles	127
36.4 sources astrophysiques d'ondes gravitationnelles : discussion générale	127
36.5 effondrement gravitationnel, trous noirs, supernovae, et pulsars comme sources	128
36.6 étoiles binaires comme source	128
36.7 formules pour la radiation depuis des sources se déplaçant doucement presque newtoniennes	128
36.8 réaction de radiation dans des sources se déplaçant doucement	128
36.9 fondations pour la dérivation des formules de radiation	128
36.10 évaluation pour un champ de radiation dans l'approximation de déplacement lent	128
36.11 dérivation du potentiel de réaction de radiation	128
37 Détection des ondes gravitationnelles	129
37.1 systèmes de coordonnées et ondes empêtantes	129
37.2 accélérations dans des détecteurs mécaniques	129
37.3 types de détecteurs mécaniques	129
37.4 détecteurs mécaniques vibrant : remarques introductives	129
37.5 détecteur idéalisé dominé par l'onde, excité par un flux régulier des ondes monochromatiques	129
37.6 détecteur idéalisé dominé par l'onde, excité par un flux arbitraire de radiation	129
37.7 détecteur général dominé par l'onde, excité par un flux arbitraire de radiation	129
37.8 détecteurs de bruit	130
37.9 détecteurs non mécaniques	130
37.10 en regardant vers le futur	130
IX TESTS EXPERIMENTAUX DE LA RELATIVITE GENERALE	133
38 Tester les fondations de la relativité	135
38.1 tester est plus facile dans le système solaire que dans l'espace lointain	135
38.2 cadre théorique pour l'analyse de tests de la relativité générale	135
38.3 test du principe de singularité de la chute libre : expérience d'Eötvös-Dicke	135
38.4 tests pour l'existence d'une métrique gouvernant les mesures de longueur et de temps	135
38.5 tests du déplacement géodésique : expériences gravitationnelles de déplacement vers le rouge	135
38.6 tests du principe d'équivalence	135
38.7 tests pour l'existence de champs inconnus à longue portée	135
39 Autres théories de la gravité et l'approximation post newtonienne	137
39.1 autres théories	137
39.2 théories métriques de la gravité	137
39.3 limites post-newtoniennes et formalisme PPN	137

39.4	système de coordonnées PPN	137
39.5	description de la matière dans le système solaire	137
39.6	nature de l'expansion post-newtonienne	137
39.7	approximation newtonienne	137
39.8	coefficients métriques PPN	137
39.9	vitesse des coordonnées PPN relatif au "référentiel au repos universel"	137
39.10	tenseur stress-énergie PPN	137
39.11	équations du mouvement PPN	137
39.12	relations des coordonnées PPN à l'univers entourant	137
39.13	résumé du formalisme PPN	137
40	Expérimentation dans le système solaire	139
40.1	plusieurs expériences ouvert pour distinguer la relativité générale des théories métriques proposées de ma gravité	139
40.2	l'utilisation de rayons lumineux et d'ondes radio pour tester la gravité	139
40.3	déviations de la "lumière"	139
40.4	décalage temporel dans la propagation radar	139
40.5	déplacement du périhélie et perturbations périodiques pour les orbites géodésiques	140
40.6	effets à trois corps dans l'orbite lunaire	140
40.7	le dragging des référentiels inertiels	140
40.8	la constante gravitationnelle est-elle constante ?	140
40.9	Est-ce que les planètes et le soleil se déplacent sur des géodésiques ?	140
40.10	résumé des tests expérimentaux sur la relativité générale	142
X	FRONTIÈRES	143
41	Spineurs	145
41.1	réflexions, rotations, et la combinaison de rotations	145
41.2	rotations infinitésimales	147
41.3	transformation de Lorentz via l'algèbre de spineur	147
41.4	precession de thomas via l'algèbre de spineur	147
41.5	spineurs	148
41.6	correspondance entre les vecteurs et les spineurs	148
41.7	algèbre de spineur	148
41.8	espace de spin et ses spineurs de base	148
41.9	le spineur vu en tant que ???	148
41.10	apparence du ciel de nuit : une application des spineurs	148
41.11	les spineurs comme un outil puissant de la théorie de la gravitation	148
42	Calcul de Regge ??	149
42.1	pourquoi le calcul de Regge	149
42.2	calcul de regg en bref	149
42.3	simplexes et angles deficit ??	149
42.4	forme du squelette des équations de champ	149
42.5	le choix de la structure lattice	149
42.6	le choix des logueurs des côtés	149
42.7	applications passées du calcul de Regge	149
42.8	le future du calcul de regge	149
43	Superespace : arène pour la dynamique de la géométrie ??	151
43.1	espace, superespace, et espace-temps distingués	151
43.2	la dynamique de la géométrie décrite dans le langage du superespace du ??	151
43.3	l'équation d'Einstein-Hamilton-Jacobi	151
43.4	fluctuations en géométrie	152

44 Au delà de la fin du temps	153
44.1 l'effondrement gravitationnel comme la plus grande crise en physique pour tous les temps	153
44.2 évaluation de la théorie qui prédit l'effondrement	153
44.3 fluctuations du vide : leur prévalence et la domination finale	153
44.4 pas de géométrie, mais une prégéométrie, comme le matériau de construction magique	153
44.5 prégéométrie comme le calcul des propositions	153
44.6 la boîte noire : le retraitement de l'univers	153

Table des figures

1.1 blah1	8
4.1	20
4.2	22
4.3	22
4.4	22
4.5	23
4.6	23
7.1 figure 7.1	30
8.1 figure 8.1	36
11.1 Une famille de géodésiques à un paramètre.	42
13.1 figure 13.2	50
21.1 figure 21.1	75
21.2 figure 21.1	78
32.1 blah1	114
36.1 figure 36.1	126
41.1	146
41.2	146
41.3	148
41.4	148
41.5	148

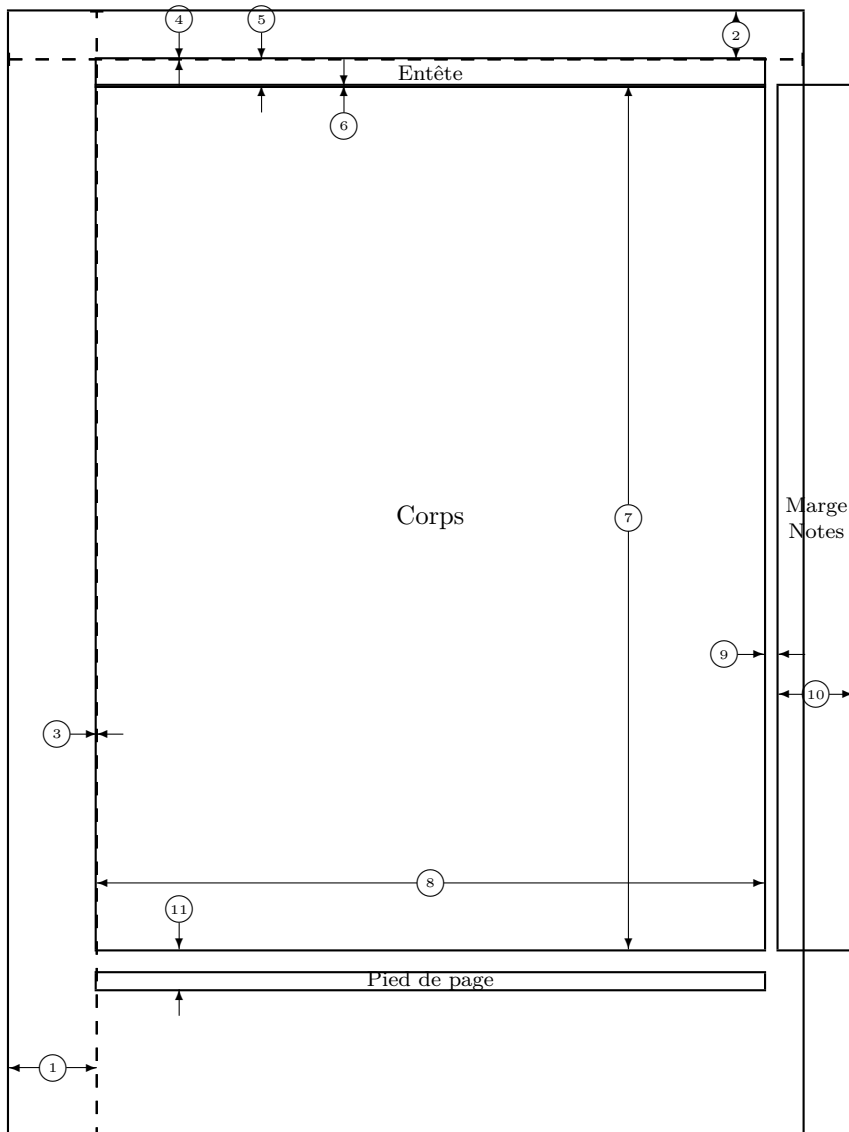
liste des exercices

4.1	Electromagnétisme et formes différentielles	15
11.1	$[\nabla_A, \nabla_B]C$ dépend des dérivées de C	44
11.2	prouve que Riemann est un tenseur	44
11.3	composantes de Riemann en base de coordonnées	44
11.4	composantes de Riemann en base sans coordonnées	44
11.5	coplanéité de courbes fermées	45
11.6	coplanéité de courbes fermées	46
11.7	46
18.1	titre	64
37.1	puissance rerayonnée	129
37.2	sections efficaces calculées par la balance détaillée ??	129
39.1	système de plusieurs corps dans la limite post-newtonienne de la relativité générale	138
40.1	métrique PPN pour un soleil idéalisé	139
40.2	trajectoire des rayons lumineux dans le champ gravitationnel du soleil	139
40.3	principe de Fermat	139
41.1	caractéristiques élémentaires de la matrice rotation	146
41.2	matrice rotation a 1 comme déterminant	146
41.3	plus de propriétés de la matrice rotation	147
43.1	L'action pour l'oscillateur harmonique	152

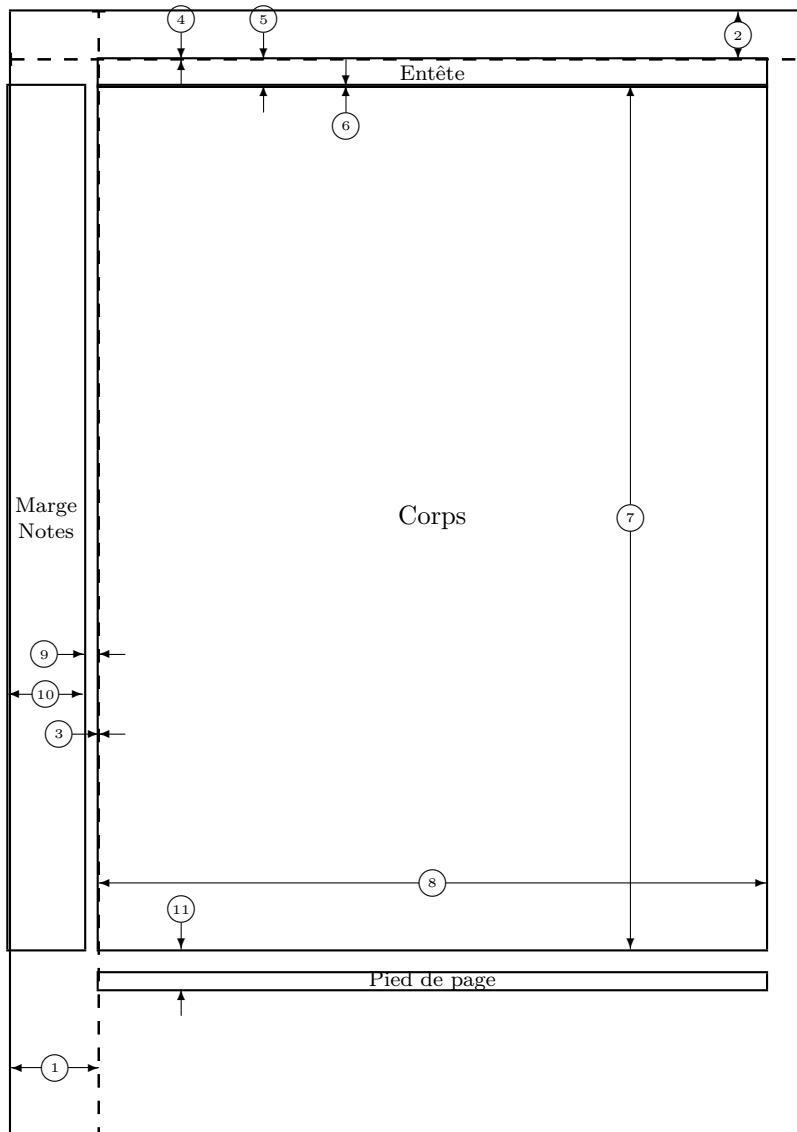
liste des boîtes

4.1	formes différentielles et calcul extérieur en bref	15
4.2	titre	21
4.3	dualité de 2-formes dans l'espace-temps	21
7.1	une tentative de description de la gravité par champ de tenseur symétrique dans un espace-temps plat	29
10.1	géodésiques	39
11.1	déviations géodésiques et courbure de Riemann en bref	41
11.2	déviations géodésiques représentées comme une flèche	42
11.3	déviations géodésiques : flèche corrélée avec une dérivée seconde covariante	42
11.4	accélération relative de particules test – analyse géométrique patterned ?? sur une analyse newtonienne	43
11.5	tenseur de courbure de Riemann	43
11.6	déviations géodésiques et transport parallèle autour d'une courbe fermée : deux aspects de la même construction	44
11.7	la loi pour le transport parallèle ?? courbes fermées	45
18.1	dérivations de la relativité générale depuis le point de vue géométrique et le point de vue de spin deux, comparé et contrasté	64
18.2	Transformations de jauge et transformations de coordonnées dans la théorie linéarisée	64
31.1	motivation pour les coordonnées de Kruskal-Szekeres	111
37.1	détecteur vibrant et résonant de arbitraire shape ??	129
37.2	détectabilité des ondes coup de marteau issues de sources astrophysiques : deux exemples (les calculs suivants ne sont précis seulement qu'à environ un ordre de grandeur	131
39.1	résumé du formalisme PPN	138
39.2	paramètres PPN utilisés dans la littérature : un guide de traduction	138
40.1	déflexion de la lumière et des ondes radios par le soleil : résultats expérimentaux	139
40.2	titre	140
41.1	titre	148

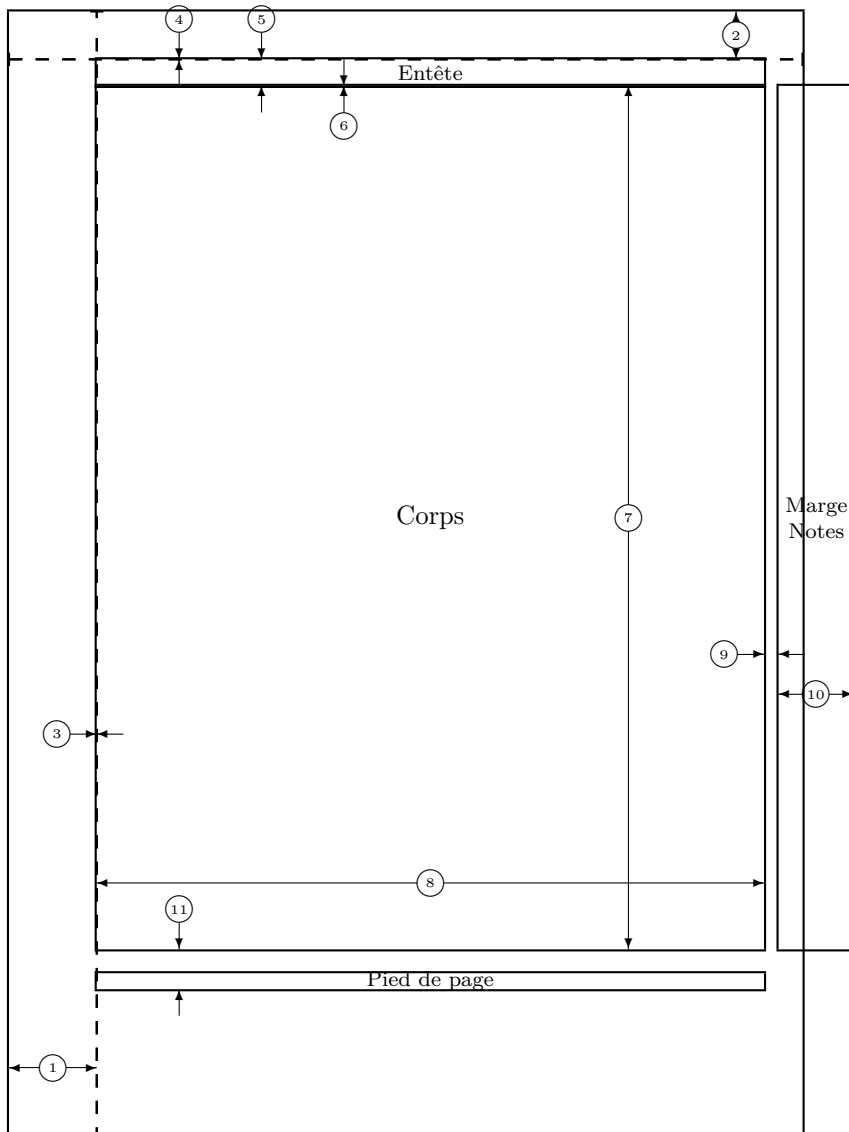
0.1. •
0.1 •



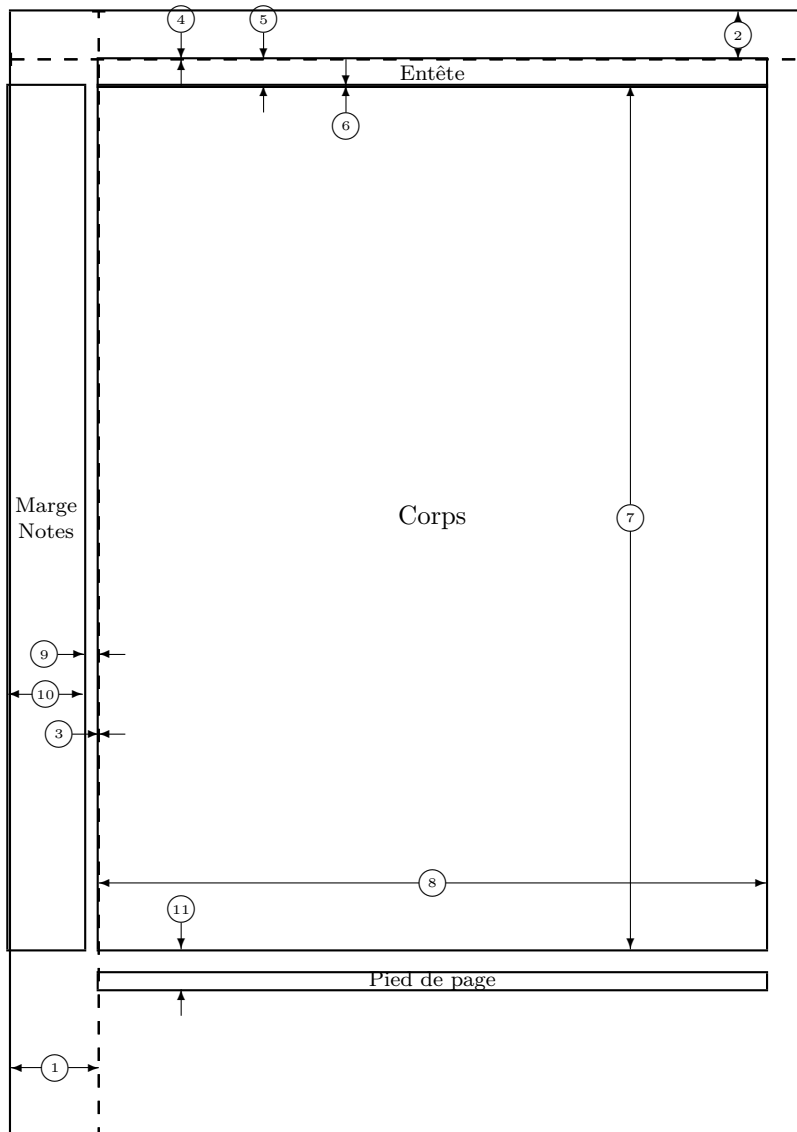
- | | |
|------------------------|------------------------------------|
| 1 un pouce + \hoffset | 2 un pouce + \voffset |
| 3 \oddsidemargin = 0pt | 4 \topmargin = 0pt |
| 5 \headheight = 20pt | 6 \headsep = 0pt |
| 7 \textheight = 650pt | 8 \textwidth = 502pt |
| 9 \marginparsep = 11pt | 10 \marginparwidth = 57pt |
| 11 \footskip = 30pt | \marginparpush = 5pt (non affiché) |
| \hoffset = -6pt | \voffset = -36pt |
| \paperwidth = 597pt | \paperheight = 845pt |



- | | |
|-------------------------|------------------------------------|
| 1 un pouce + \hoffset | 2 un pouce + \voffset |
| 3 \evensidemargin = 0pt | 4 \topmargin = 0pt |
| 5 \headheight = 20pt | 6 \headsep = 0pt |
| 7 \textheight = 650pt | 8 \textwidth = 502pt |
| 9 \marginparsep = 11pt | 10 \marginparwidth = 57pt |
| 11 \footskip = 30pt | \marginparpush = 5pt (non affiché) |
| \hoffset = -6pt | \voffset = -36pt |
| \paperwidth = 597pt | \paperheight = 845pt |



- | | |
|------------------------|------------------------------------|
| 1 un pouce + \hoffset | 2 un pouce + \voffset |
| 3 \oddsidemargin = 0pt | 4 \topmargin = 0pt |
| 5 \headheight = 20pt | 6 \headsep = 0pt |
| 7 \textheight = 650pt | 8 \textwidth = 502pt |
| 9 \marginparsep = 11pt | 10 \marginparwidth = 57pt |
| 11 \footskip = 30pt | \marginparpush = 5pt (non affiché) |
| \hoffset = -6pt | \voffset = -36pt |
| \paperwidth = 597pt | \paperheight = 845pt |



- | | |
|-------------------------|------------------------------------|
| 1 un pouce + \hoffset | 2 un pouce + \voffset |
| 3 \evensidemargin = 0pt | 4 \topmargin = 0pt |
| 5 \headheight = 20pt | 6 \headsep = 0pt |
| 7 \textheight = 650pt | 8 \textwidth = 502pt |
| 9 \marginparsep = 11pt | 10 \marginparwidth = 57pt |
| 11 \footskip = 30pt | \marginparpush = 5pt (non affiché) |
| \hoffset = -6pt | \voffset = -36pt |
| \paperwidth = 597pt | \paperheight = 845pt |

Première partie

LA PHYSIQUE DE L'ESPACE-TEMPS

Chapitre 1

géomérodynamique en bref

1.1 L'espace-temps sans et avec des coordonnées

1.2 apesanteur

1.3 Géométrie de Lorentz locale avec et sans coordonnées

1.4 temps

1.5 courbure

Boîte1.6 Boîte1.7

1.6 Effet de la matière sur la géométrie

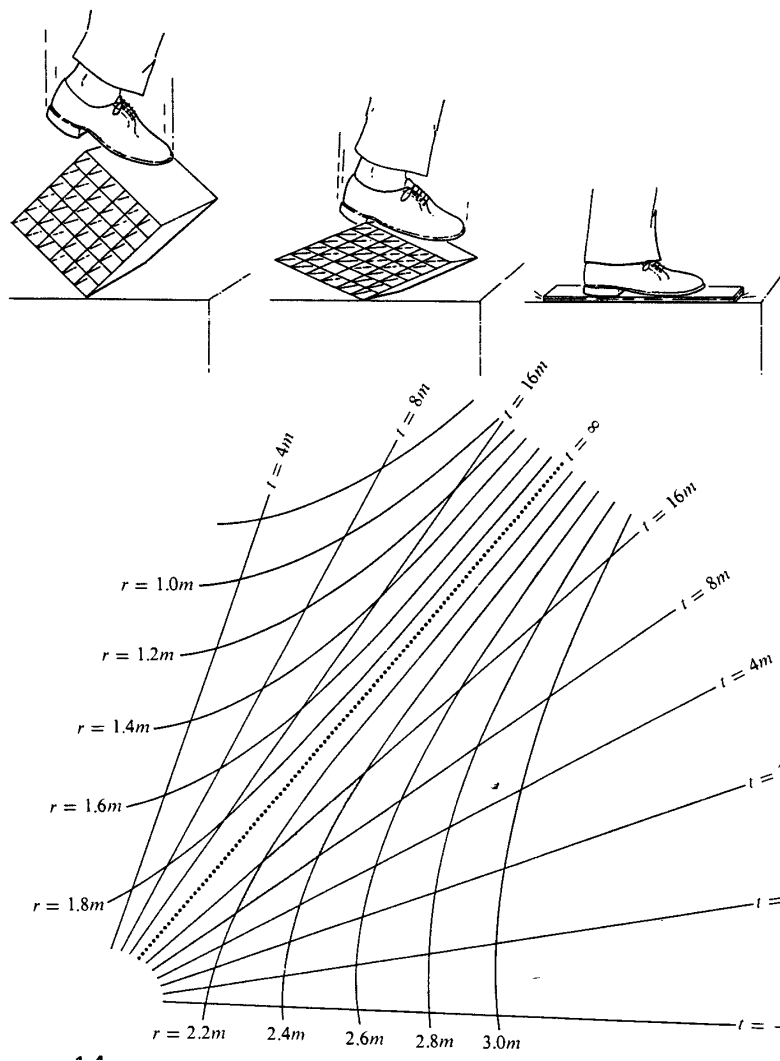


FIGURE 1.1 – titre

legende legende legende legende legende legende legende legende legende legende legende legende legende legende
 legende legende legende legende legende legende legende legende legende legende legende legende legende legende
 legende legende legende legende legende legende legende legende legende legende legende legende legende legende
 legende legende legende legende legende legende legende legende legende

Deuxième partie

**LA PHYSIQUE DANS UN
ESPACE-TEMPS PLAT**

Chapitre 2

les fondations de la relativité restreinte

- 2.1 vue d'ensemble
- 2.2 objets géométriques
- 2.3 vecteurs
- 2.4 le tenseur métrique
- 2.5 formes différentielles
- 2.6 gradients et dérivées directionnelles
- 2.7 représentation en coordonnées des objets géométriques
- 2.8 le centrifuge et le photon
- 2.9 transformations de Lorentz
- 2.10 collisions

Chapitre 3

voir dans **Version 1.1**

Chapitre 4

Electromagnétisme et formes différentielles

Electromagnétisme et formes différentielles

L'éther tremblait de ses agitations ??
D'une manière si familière que j'ai seulement besoin de dire
En accord avec les six équations de Clerk Maxwell
??

L'éther tremblait de ses agitations ??
D'une manière si familière que j'ai seulement besoin de dire
En accord avec les six équations de Clerk Maxwell

??

4.1 Calcul extérieur

Des piles de surface, individuellement ou se croisant pour faire "des nids d'abeille", "caisses d'œufs" et autres telles structures ("formes différentielles"), donne un unique aperçu dans la géométrie de l'électromagnétisme et de la gravitation. Cependant, un tel aperçu vient à un coût à temps. ?? Ainsi, la plupart des lecteurs devraient sauter ce chapitre et ensuite tout matériel qui en dépend durant une première lecture de ce livre.

Analytiquement parlant, les formes différentielles sont des tenseurs complètement antisymétriques; picturalement ?? parlant, elles intersectent les piles de surfaces. Le formalisme mathématique pour manipuler les formes différentielles avec aisance, appelé "calcul extérieur", est résumé avec concision dans la boîte 4.1; ces caractéristiques de base sont illustrées dans le reste de ce chapitre en réécrivant la théorie électromagnétique dans ce langage. Une façon effective de s'attaquer à ce chapitre pourrait être (1) examinez la boîte 4.1 pour obtenir le parfum du formalisme; (2) lisez le reste du chapitre en détail; (3) réétudiez la boîte 4.1 attentivement; (4) entraînez-vous en manipulant le formalisme en travaillant les exercices ¹.

boîte 4.1 formes différentielles et calcul extérieur en bref

Les définitions et calculs fondamentaux du calcul extérieur sont résumés ici pour une référence prête ??

1. Le calcul extérieur est traité en plus grand détail que ici par : [6] [4] [11] [8] [10] particulièrement [7] (relativement facile, avec beaucoup d'applications); [15] (niveau junior ou deuxième année ?? mais entièrement en accord avec les mathématiques modernes) [9] et [3]

Chaque élément consiste en une déclaration ?? (à gauche de la page) plus une application principale (à la droite de la page). Ce formalisme est applicable non seulement à l'espace-temps , mais aussi aux systèmes géométriques plus généraux (voir l'entête ?? de chaque section). Aucune tentative n'est faite pour démontrer la consistance interne du formalisme, ou pour la dériver d'une quelconque donnée de définitions et axiomes. Pour un traitement systématique qui le fait, voir, par ex., [15] ou [?].

Algèbre I (applicable à n'importe quel vecteur)

(a) *bases de 1-formes*

i. base de coordonnées $\omega^j = dx^j$

ii. base générale $\omega^j = L^j_{k'} dx^{k'}$

Une application

Une base simple de 1-formes pour analyser la géométrie de Schwarzschild autour du centre d'attraction statique symétrique sphériquement :

$$\begin{aligned}\omega^0 &= (1 - 2m/r)^{1/2} dt \\ \omega^1 &= (1 - 2m/r)^{-1/2} dr \\ \omega^2 &= r d\theta \\ \omega^3 &= r \sin\theta d\phi\end{aligned}$$

(b) *p-forme générale* (ou p-vecteur) est un tenseur complètement antisymétrique de rang $\binom{0}{p}$ [ou $\binom{p}{0}$]. Il peut être développé en termes de produits vectoriels (voir ?? et ??) :

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{p!} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_p} \omega^{i_1} \wedge \omega^{i_2} \wedge \dots \wedge \omega^{i_p} \\ &\equiv \alpha_{|i_1 i_2 \dots i_p|} \omega^{i_1} \wedge \omega^{i_2} \wedge \dots \wedge \omega^{i_p}\end{aligned}$$

(Note : les barres verticales autour des indices signifie que la sommation s'étend seulement sur $i_1 < i_2 < \dots < i_p$

Deux applications

La 1-forme d'énergie-momentum est du type $\alpha = \alpha_i \omega^i$ ou

$$\mathbf{p} = -E dt + p_x dx + p_y dy + p_z dz$$

Faraday est une 2-forme du type $\beta = \beta_{|\mu\nu|} \omega^\mu \wedge \omega^\nu$ ou dans l'espace-temps plat

$$\mathbf{F} = -E_x dt \wedge dx - E_y dt \wedge dy - E_z dt \wedge dz + B_x dy \wedge dz + B_y dz \wedge dx + B_z dx \wedge dy$$

(c) *produit vectoriel* Toutes les règles familières de l'addition et de la multiplication tiennent, comme

$$\begin{aligned}(a\alpha + b\beta) \wedge \gamma &= a\alpha \wedge \gamma + b\beta \wedge \gamma \\ (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma &= \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \equiv \alpha \wedge \beta \wedge \gamma\end{aligned}$$

sauf pour une loi de commutation entre une p-forme α et une q-forme β :

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha$$

Applications aux 1-formes α, β :

$$\begin{aligned}\alpha \wedge \beta &= -\beta \wedge \alpha, \quad \alpha \wedge \alpha = 0; \\ \alpha \wedge \beta &= (\alpha_j \omega^j) \wedge (\beta_g \omega^g) = \alpha_j \beta_g \omega^j \wedge \omega^g \\ &= \frac{1}{2}(\alpha_j \beta_k - \beta_j \alpha_k) \omega^j \wedge \omega^k\end{aligned}$$

(d) contraction d'une p-forme sur un p-vecteur

$$\begin{aligned}\langle \alpha, \mathbf{A} \rangle_p &= \alpha_{|i_1 \dots i_p|} A^{|j_1 \dots j_p|} \underbrace{\langle \omega^{i_1} \wedge \dots \wedge \omega^{i_p}, \mathbf{e}_{j_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{e}_{j_p} \rangle}_{\equiv \delta_{j_1 \dots j_p}^{i_1 \dots i_p} \text{ (voir exercices ?? et ??)}} \\ &= \alpha_{|i_1 \dots i_p|} A^{|j_1 \dots j_p|}\end{aligned}$$

Quatre applications

- i. a[.]??
- ii. b[.]
- iii. c[.]
- iv. d[.]

(e) formes simples

- i. Une p-forme simple est une p-forme qui peut être écrite comme un produit vectoriel de p 1-forme :

$$\sigma_p = \underbrace{\alpha \wedge \beta \wedge \dots \wedge \gamma}_{p \text{ facteurs}}$$

- ii. Une p-forme simple $\alpha \wedge \beta \wedge \dots \wedge \gamma$ est représentée par les familles de surfaces sécantes?? de $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ (structure egg-crate??) plus un sens de circulation (orientation).

Applications

- A. En quatre dimensions (càd lespace-temps) toutes les 0-formes, 1-formes, 3-formes et 4-formes sont simples. Une 2-forme \mathbf{F} est de manière générale une somme de deux formes simples , p.e. $\mathbf{F} = -e\mathbf{d}t \wedge \mathbf{d}x + h\mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z$; c'est simple si et seulement si $\mathbf{F} \wedge \mathbf{F} = 0$.
- B. un ensemble de 1-formes $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ est linéairement dépendant (une est une combinaison linéaire des autres) si et seulement si $\alpha \wedge \beta \wedge \dots \wedge \gamma = 0$ (egg-crate?? effondré)

B dérivée extérieure [..]

- (a) \mathbf{d} produit une (p+1)-forme $\mathbf{d}\sigma$ depuis une p-forme σ .
- (b) L'effet de \mathbf{d} est définie par induction en utilisant la définition de $\mathbf{d}f$ (chapitre 2²) et une fonction f (0-forme), plus

$$\begin{aligned} \mathbf{d}(\alpha \wedge \beta) &= \mathbf{d}\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge \mathbf{d}\beta \\ \mathbf{d}^2 &= \mathbf{d}\mathbf{d} = 0 \end{aligned}$$

Deux Applications

$$\mathbf{d}(\alpha \wedge \mathbf{d}\beta) = \mathbf{d}\alpha \wedge \mathbf{d}\beta$$

pour la p-forme Φ , avec

$$\Phi = \Phi_{|i_1 \dots i_p|} \mathbf{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{i_p}$$

on a (définition équivalente et alternative de $\mathbf{d}\Phi$)

$$\mathbf{d}\Phi = \mathbf{d}\Phi_{|i_1 \dots i_p|} \mathbf{d}x^{i_1} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{i_p}$$

C intégration [..]

(a) 1[..]

(b) 2[..]

(c) 3[..]

i. a[..]

ii. b[..]

iii. c[..]

iv. d[..]

v. e[..]

(d) 4[..]

i. a[..]

ii. b[..]

iii. c[..]

D algèbre II [..]

(a) Norme d'une p-forme

$$\|\alpha\|^2 \equiv \alpha_{|i_1 \dots i_p|} \alpha^{i_1 \dots i_p}$$

Deux Applications : La norme d'une 1-forme est égale à la racine carré de sa longueur ??? $\|\alpha\|^2 = \alpha \bullet \alpha$. la norme d'une 2-forme électromagnétique ou **Faraday** : $\|\mathbf{F}\|^2 = \mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2$

(b) dual d'une p-forme

i. Dans un espace à n dimensions, le dual d'une p-forme α est la (n-p)-form $*\alpha$ avec les composantes

$$(*\alpha)_{k_1 \dots k_{n-p}} = \alpha^{i_1 \dots i_p} \epsilon_{i_1 \dots i_p k_1 \dots k_{n-p}}$$

ii. propriété des duals :

$$**\alpha = (-1)^{p-1}\alpha \text{ dans l'espace-temps}$$

$$\alpha \wedge *\alpha = \|\alpha\|^2 \epsilon \text{ en général}$$

iii. Note : la définition de ϵ (exercice ??) entaills ?? une orientation de l'espace ; càd ; décider quelles bases orthonormales (1) sont "right-handed" ?? et ainsi ont $\epsilon(\mathbf{e}_1 \dots \mathbf{e}_n) = +1$.

Applications

- pour une 0-forme, $*f = f\epsilon$ et $\int f d(\text{volume}) = \int *f$
- Le dual de la 1-forme \mathbf{J} de courant de charge est la 3-forme $*\mathbf{J}$ de courant de charge. La charge totale Q dans une hypersurface à 3 dimensions S est

$$Q(S) = \int_S *\mathbf{J}$$

La conservation de la charge est établie localement par $\mathbf{d}*\mathbf{J} = 0$. Le théorème de Stokes va de cette loi de conservation différentielle à la loi de conservation intégrale,

$$0 = \int_V \mathbf{d}*\mathbf{J} = \int_{\partial V} *\mathbf{J}$$

??

- le dual du tenseur de champ électromagnétique $\mathbf{F} = \mathbf{Faraday}$ est $*\mathbf{F} = \mathbf{Maxwell}$. De l'équation de Maxwell $\mathbf{d}*\mathbf{F} = 4\pi*\mathbf{J}$, trouver $4\pi Q = 4\pi \int_S *\mathbf{J} = \int_S \mathbf{d}*\mathbf{F} = \int_{\partial S} *\mathbf{F}$

(c) formes simples revisitées ??

i. a[.]

ii. b[.]

4.2 forme électromagnétique et force de Lorentz

Le tenseur de champ électromagnétique, $\mathbf{Faraday} = \mathbf{F}$, est un tenseur antisymétrique de second-rang (càd 2-forme). Au lieu de le développer en termes du produit tensoriel de 1-formes de base,

$$\mathbf{F} = F_{\alpha\beta} \mathbf{d}x^\alpha \otimes \mathbf{d}x^\beta$$

le calcul extérieur préfère développer en termes de produit tensoriel antisymétrisé ("produits extérieurs", exercice ??) :

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} \mathbf{d}x^\alpha \wedge \mathbf{d}x^\beta \quad (4.1)$$

$$\mathbf{d}x^\alpha \wedge \mathbf{d}x^\beta \equiv \mathbf{d}x^\alpha \otimes \mathbf{d}x^\beta - \mathbf{d}x^\beta \otimes \mathbf{d}x^\alpha \quad (4.2)$$

N'importe quelle 2-forme (antisymétrique, tenseur de second rang) peut être ainsi développée. Le symbole " \wedge " est diversement appelé un "wedge", un "hat" ou un "exterior product sign" ; et $\mathbf{d}x^\alpha \wedge \mathbf{d}x^\beta$ sont les "2-formes de base" d'une repère de Lorentz donné (voir ??, exercice ??, et boîte 4.1).

Il n'y a pas de façon plus simple d'illustrer cette représentation 2-forme du champ électromagnétique que de considérer un champ magnétique dans la direction x :

$$\begin{aligned} F_{yz} &= -F_{zy} = B_x \\ \mathbf{F} &= B_x \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z \end{aligned} \tag{4.3}$$

La 1-forme $\mathbf{d}y = \text{grad}y$ est l'ensemble des surfaces (en réalité hypersurfaces) $y=18$ (tout t,x,z), $y=19$ (tout t,x,z), $y=20$ (tout t,x,z), etc; et les surfaces uniformément interpolées entre elles. De même pour la 1-forme $\mathbf{d}z$. L'intersection entre ces deux ensembles de surfaces produit une structure de type nid d'abeille. Cette structure devient une 2-forme qui est suppléée par les instructions (voir flèches dans la figure 4.1) qui donne un "sens de circulation" à chaque tube du nid d'abeille (l'ordre des facteurs dans le "produit vectoriel" de l'équation 4.2; $\mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z = -\mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}y$). La 2-forme \mathbf{F} dans l'exemple diffère de cette 2-forme basique $\mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z$ seulement, à cet égard , que quand $\mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z$ a un tube, le champ 2-forme a B_x tubes.

Quand on considère une structure tubulaire qui s'enroule et tourne sur son chemin à travers l'espace-temps , on doit avoir plus de composantes pour le décrire. La 2-forme pour le champ électromagnétique général peut être écrite

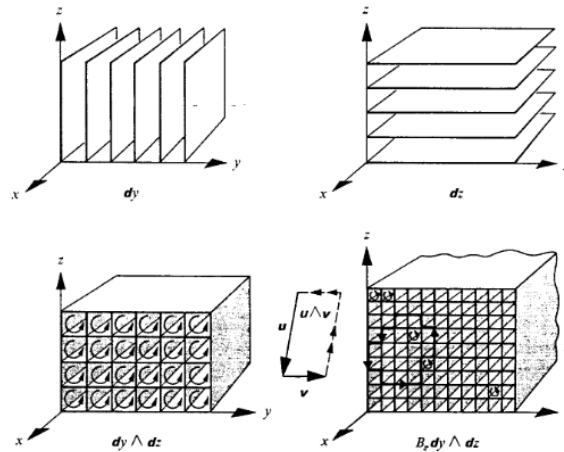
$$\mathbf{F} = E_x \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}t + E_y \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}t + E_z \mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}t + B_x \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z + B_y \mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}x + B_z \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \tag{4.4}$$

(6 composantes, 6 2-formes de base)

Une 1-forme est une machine pour produire un nombre depuis un vecteur (bangs d'une cloche lorsque le vecteur perce des surfaces successives). Une 2-forme est une machine pour produire un nombre depuis une surface orientée (une surface avec un sens de circulation indiqué dessus : *figure4.1*^{4.1}, en bas à droite). La signification est aussi claire qu'elle l'est dans le magnétisme élémentaire :

[..]

FIGURE 4.1 –



Construction de la 2-forme pour le champ électromagnétique $\mathbf{F} = B_x \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z$ depuis les 1-formes $\mathbf{d}y$ et $\mathbf{d}z$ par "la multiplication vectorielle" (formation d'une structure en nid d'abeille avec un sens de circulation indiqué par les flèches). Une 2-forme est "une machine pour construire un nombre depuis une surface orientée" (illustré par la surface d'exemple fermée par des flèches dans le dessin en bas à droite ; le nombre de tubes coupés par cette surface est

$$\int_{\text{cette surface}} \mathbf{F} = 18;$$

concept de Faraday du "flux magnétique"). [..]

le nombre de tubes de Faraday coupés par cette surface. La 2-forme électromagnétique \mathbf{F} ou **Faraday** décrite par une telle "structure tubulaire" (convenablement abstrait???; (boîte 4.2 4.2) a une réalité et une position

4.3. LES FORMES ÉCLAIRENT L'ÉLECTROMAGNÉTISME, ET L'ÉLECTROMAGNÉTISME ÉCLAIRE LES FORMES
 dans l'espace qui est indépendante de tous les systèmes de coordonnées et toutes les distinctions artificielles entre champs "électrique" et "magnétique". De plus, ces tubes fournissent la plus directe des représentations que personne n'a jamais été capable de donner pour la machine par laquelle le champ électromagnétique agit sur une particule chargée. Prenez une particule de charge e et de 4-vitesse

$$\mathbf{u} = \frac{dx^\alpha}{d\tau} \mathbf{e}_\alpha \quad (4.5)$$

Laissons la particule aller dans une région où le champ électromagnétique est décrit par la 2-forme

$$\mathbf{F} = B_x \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z \quad (4.6)$$

de la figure 4.14.1. Alors la force exercée sur la particule (vue comme une 1-forme) est la contraction de cette 2-forme avec la 4-vitesse (et la charge)

$$\dot{\mathbf{p}} = d\mathbf{p}/d\tau = e\mathbf{F}(\mathbf{u}) \equiv e \langle \mathbf{F}, \mathbf{u} \rangle \quad (4.7)$$

[..]

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}} &= eB_x \langle \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z, \mathbf{u} \rangle \\ &= eB_x \{ \mathbf{d}y \langle \mathbf{d}z, \mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{d}z, \mathbf{d}y, \mathbf{u} \rangle \} \\ &= eB_x \{ \mathbf{d}y \langle \mathbf{d}z, u^z \mathbf{e}_z \rangle - \langle \mathbf{d}z \langle \mathbf{d}y, u^y \mathbf{e}_y \rangle \} \end{aligned}$$

ou

$$\dot{p}_\alpha dx^\alpha = eB_x u^z dy - eB_x u^y dz \quad (4.8)$$

En comparant les coefficients des 1-formes de base séparées des deux côtés de cette équation, on voit reproduits tous les détails de la force de Lorentz exercée par le champ magnétique B_x :

$$\begin{aligned} \dot{p}_y &= \frac{dp_y}{d\tau} = eB_x \frac{dz}{d\tau} \\ \dot{p}_z &= \frac{dp_z}{d\tau} = -eB_x \frac{dy}{d\tau} \end{aligned} \quad (4.9)$$

[..]

boîte 4.2 titre

Boîte 4.2 abstraite?? une 2-forme à partir du concept de « structure de type Honeycomb » dans un 3-espace et un espace-temps

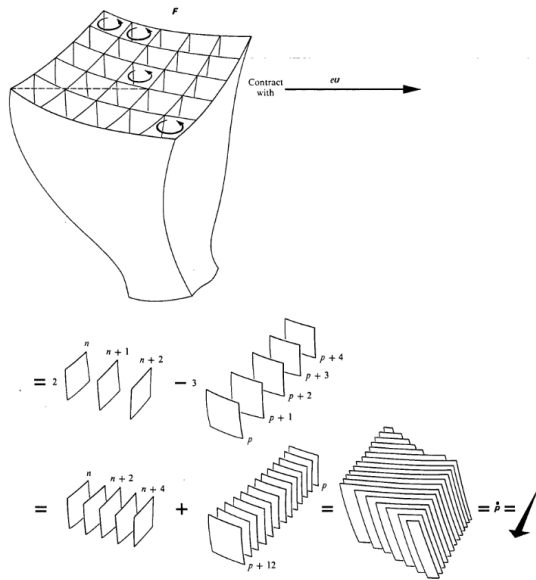
4.3 Les formes éclairent l'électromagnétisme, et l'électromagnétisme éclaire les formes

[..]
 [..]
 [..]

boîte 4.3 dualité de 2-formes dans l'espace-temps

[..] [..]

FIGURE 4.2 –



Le Faraday ou 2-forme \mathbf{F} du champ électromagnétique est une machine pour produire une 1-forme (le taux temporel de changement de la quantité de mouvement $\dot{\mathbf{p}}$ d'une particule chargée) depuis un vecteur tangent (produit de la charge e de la particule et sa 4-vitesse \mathbf{u}). Dans l'espace-temps la 2-forme générale est la "superposition" (voir boîte 4.2 4.2) de deux structures comme celles illustrées en haut de ce diagramme, les tubes du premier étant dirigés ?? et compactés ?? comme indiqués, les tubes du second étant dirigés ?? dans une autre direction et ayant une densité de compactage différente.

FIGURE 4.3 –

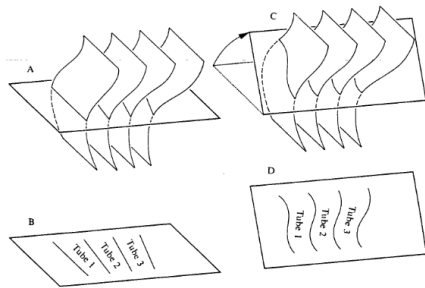
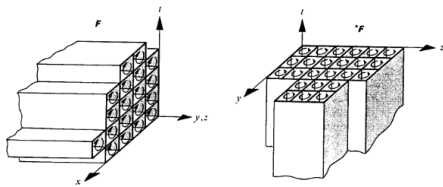


FIGURE 4.4 –



4.4 Champs de radiation

[.] [.]

FIGURE 4.5 –

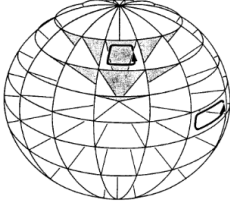
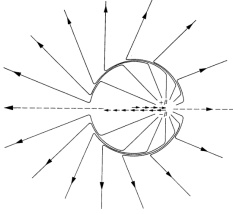


FIGURE 4.6 –



4.5 Équations de Maxwell

[.]

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \mathbf{d}x^\mu \wedge \mathbf{d}x^\nu \quad (4.10)$$

[.]

$$\Phi = \frac{1}{f!} \Phi_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_f} \mathbf{d}x^{\alpha_1} \wedge \mathbf{d}x^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{\alpha_f} \quad (4.11)$$

[.]

La dérivée extérieure de Φ est

$$\mathbf{d}\Phi = \frac{1}{f!} \frac{\partial \Phi_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_f}}{\partial x^{\alpha_0}} \mathbf{d}x^{\alpha_0} \wedge \mathbf{d}x^{\alpha_1} \wedge \mathbf{d}x^{\alpha_2} \wedge \dots \wedge \mathbf{d}x^{\alpha_f} \quad (4.12)$$

[.]

$$\begin{aligned} \mathbf{d}\mathbf{F} &= \mathbf{d}(E_x \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}t + E_y \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}t + E_z \mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}t + B_x \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z + B_y \mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}x + B_z \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y) \\ &= \left(\frac{\partial E_x}{\partial t} \mathbf{d}t + \frac{\partial E_x}{\partial x} \mathbf{d}x + \frac{\partial E_x}{\partial y} \mathbf{d}y + \frac{\partial E_x}{\partial z} \mathbf{d}z \right) \wedge \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}t \\ &\quad + \left(\frac{\partial E_y}{\partial t} \mathbf{d}t + \frac{\partial E_y}{\partial x} \mathbf{d}x + \frac{\partial E_y}{\partial y} \mathbf{d}y + \frac{\partial E_y}{\partial z} \mathbf{d}z \right) \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}t \\ &\quad + \left(\frac{\partial E_z}{\partial t} \mathbf{d}t + \frac{\partial E_z}{\partial x} \mathbf{d}x + \frac{\partial E_z}{\partial y} \mathbf{d}y + \frac{\partial E_z}{\partial z} \mathbf{d}z \right) \wedge \mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}t \\ &\quad + \left(\frac{\partial B_x}{\partial t} \mathbf{d}t + \frac{\partial B_x}{\partial x} \mathbf{d}x + \frac{\partial B_x}{\partial y} \mathbf{d}y + \frac{\partial B_x}{\partial z} \mathbf{d}z \right) \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z \\ &\quad + \left(\frac{\partial B_y}{\partial t} \mathbf{d}t + \frac{\partial B_y}{\partial x} \mathbf{d}x + \frac{\partial B_y}{\partial y} \mathbf{d}y + \frac{\partial B_y}{\partial z} \mathbf{d}z \right) \wedge \mathbf{d}z \wedge \mathbf{d}x \\ &\quad + \left(\frac{\partial B_z}{\partial t} \mathbf{d}t + \frac{\partial B_z}{\partial x} \mathbf{d}x + \frac{\partial B_z}{\partial y} \mathbf{d}y + \frac{\partial B_z}{\partial z} \mathbf{d}z \right) \wedge \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \end{aligned} \quad (4.13)$$

(4.14)

[.]

$$\mathbf{dF} = \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} \mathbf{d}x + \frac{\partial B_y}{\partial y} \mathbf{d}y + \frac{\partial B_z}{\partial z} \mathbf{d}z \right) \mathbf{d}x \wedge \mathbf{d}y \wedge \mathbf{d}z \quad (4.15)$$

[..]

4.6 Dérivée extérieure et formes fermées

Boîte 4.4 la progression de formes et les dérivées extérieures

Chapitre 5

Le tenseur Energie-Impulsion et les lois de conservation

- 5.1 Track 1 revue
- 5.2 volumes en 3 dimensions de définition du tenseur énergie-impulsion
- 5.3 composantes du tenseur Energie-Impulsion
- 5.4 tenseur Energie-Impulsion pour un swarm ?? de particules
- 5.5 tenseur Energie-Impulsion pour un fluide parfait
- 5.6 tenseur Energie-Impulsion électromagnétique
- 5.7 symétrie du tenseur Energie-Impulsion
- 5.8 Conservation du 4-moment : formule intégrale
- 5.9 Conservation du 4-moment : formule différentielle
- 5.10 exemple d'application de $\nabla \bullet T = 0$
- 5.11 moment angulaire

Chapitre 6

Les observateurs accélérés

- 6.1 ●
- 6.2 ●
- 6.3 ●
- 6.4 ●
- 6.5 ●
- 6.6 ●
- 6.7 ●
- 6.8 ●

Chapitre 7

Incompatibilité de la gravité de la relativité restreinte

7.1 •

boîte 7.1 une tentative de description de la gravité par champ de tenseur symétrique dans un espace-temps plat

Les équations de champ (4) et les propriétés de jauge (5) de la présente théorie d'espace-temps plat sont identiques à celles de "la théorie linéarisée" d'Einstein. Ainsi le traitement des ondes gravitationnelles en utilisant la théorie linéarisée, qui est présentée en ?? et ?? et ??, s'applique ici.

7.2 •

7.3 le décalage vers le rouge gravitationnel impose à l'espace-temps d'être courbé

Un argument par Schild (1960, 1962, 1967) apporte une importante conclusion : l'existence du décalage vers le rouge gravitationnel montre que théorie de la gravitation consistante ne peut pas être construite à l'intérieur du cadre de la relativité restreinte.

[..] L'argument de Schild procède comme suit. Considérons l'observateur au repos sur la surface de la Terre à la hauteur z_1 , et un second sur la surface de la Terre à la hauteur $z_2 = z_1 + h$ (Figure 7.1). Les observateurs peuvent vérifier qu'ils sont au repos relativement l'un à l'autre et relativement au repère de Lorentz de la Terre, avec par exemple un radar mesurant la distance à des particules libres qui sont au repos dans le repère terrestre loin de son champ gravitationnel. L'expérimentateur du dessous émet alors un signal électromagnétique à une fréquence standard fixe ω_b qui est reçue par l'observateur au dessus. Par définition ??, le signal est une impulsion long de N cycles exactement. Alors l'intervalle de temps ¹ $\delta\tau_{bas}$ nécessaire pour l'émission de l'impulsion est donnée par $2\pi N = \omega_b \delta\tau_{bas}$. L'observateur en haut va alors recevoir les mêmes N cycles de l'impulsion de l'onde électromagnétique et mesurer l'intervalle de temps $\delta\tau_{haut}$ nécessaire. Par définition de la "fréquence", elle satisfait $2\pi N = \omega_h \delta\tau_{haut}$. L'effet du décalage vers le rouge, établi par l'expérience (pour nous) ou par la conservation de l'énergie (pour Einstein), montre $\omega_h < \omega_b$; en conséquence les intervalles de temps sont différents, $\tau_h > \tau_b$ [..] on atteint uen contradiction en notant que l'on a dessiné un *parallélogramme* dans l'espace de Minkowski dans lequel des côtés sont inégaux, $\tau_h > \tau_b$, alors que un parallélogramme dans un espace plat de Minkowski ne peut avoir des côtés opposés inégaux.

1. le temps propre est égal à la coordonnée de temps de Lorentz pour les deux observateurs, puisqu'ils sont au repos dans le repère de Lorentz de la Terre.

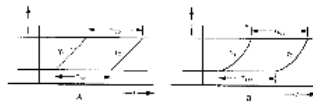


FIGURE 7.1 – figure 7.1

Des impulsions successives de la lumière de la hauteur z_1 à la hauteur $z_2 = z_1 + h$ contre le champ gravitationnel de la terre. Le chemin γ_1 et γ_2 doivent être exactement congruents ??, que la pente soit à 45° (à gauche) ou qu'elle ait une pente variable (à droite).

7.4. •

[..] Quelquesoit le chemin γ_1 , le chemin γ_2 doit être un chemin congruent de forme toalement identique, simplement translaté dans le temps.

7.4 •

7.5 •

Troisième partie

**LES MATHÉMATIQUES DE
L'ESPACE-TEMPS COURBE**

Chapitre 8

Géométrie différentielle : une présentation

8.1 Une présentation de la partie III

8.2 Track 1 contre track 2 : différence de perspective et de puissance

8.3 3 aspects de la géométrie : en images, abstraite, en terme de composantes

[...] La gravité newtonienne (chapitre 12) [...] des équations de champ d'Einstein (chapitre ??), [...]

Il n'est pas nouveau de faire des aller-retours entre les trois langages comme en témoigne le traitement [...] de la vitesse et de l'accélération d'une planète dans un déplacement de Kepler autour du soleil. La vitesse est écrite

$$\mathbf{v} = v^{\hat{r}} \mathbf{e}_{\hat{r}} + v^{\hat{\phi}} \mathbf{e}_{\hat{\phi}} \quad (8.1)$$

(le chapeau [^] sur $\mathbf{e}_{\hat{r}}$ et $\mathbf{e}_{\hat{\phi}}$ signifie qu'ils sont des vecteurs unité). L'accélération est

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv^{\hat{r}}}{dt} \mathbf{e}_{\hat{r}} + \frac{dv^{\hat{\phi}}}{dt} \mathbf{e}_{\hat{\phi}} + v^{\hat{r}} \frac{d\mathbf{e}_{\hat{r}}}{dt} + v^{\hat{\phi}} \frac{d\mathbf{e}_{\hat{\phi}}}{dt} \quad (8.2)$$

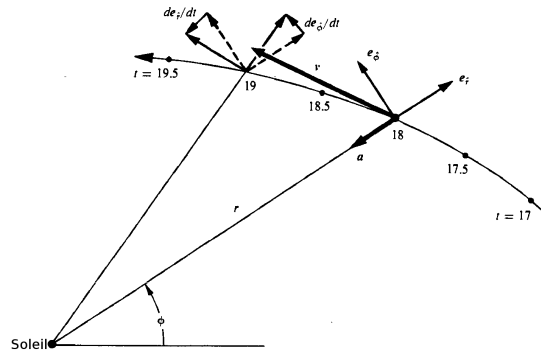
Les vecteurs unités tournent (??) avec la vitesse angulaire $\omega = d\phi/dt$, donc

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{e}_{\hat{r}}}{dt} &= \omega \mathbf{e}_{\hat{\phi}} = \frac{d\phi}{dt} \mathbf{e}_{\hat{\phi}} \\ \frac{d\mathbf{e}_{\hat{\phi}}}{dt} &= -\omega \mathbf{e}_{\hat{r}} = -\frac{d\phi}{dt} \mathbf{e}_{\hat{r}} \end{aligned} \quad (8.3)$$

Ainsi les composantes de l'accélération ont les valeurs

$$\begin{aligned} a^{\hat{r}} &= \frac{dv^{\hat{r}}}{dt} - v^{\hat{\phi}} \frac{d\phi}{dt} = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \\ \text{et} \\ a^{\hat{\phi}} &= \frac{dv^{\hat{\phi}}}{dt} + v^{\hat{r}} \frac{d\phi}{dt} = \frac{d}{dt} \left(r \frac{d\phi}{dt} \right) + \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} \end{aligned} \quad (8.4)$$

FIGURE 8.1 – figure 8.1



Une orbite Képlérienne dans le champ de gravité du soleil, traité en utilisant la version standard de type espace euclidien de la gravité newtonienne. Les vecteurs de base se changent eux-même d'un point à un autre point le long de l'orbite (équations ??). Cette figure illustre l'aspect pictural de la géométrie différentielle. Plus tard (exercice ??) cela illustrera les concepts de "dérivée covariante" et "coefficients de connexion".

8.4 Algèbre tensorielle en espace-temps courbé

8.5 Transport parallèle, dérivée covariante, coefficients de connexion, géodésiques

8.6 Repère de Lorentz local : discussion mathématique

8.7 Déviation géodésique et le tenseur de courbure de riemann

"La Gravitation est la manifestation de la courbure de l'espace-temps, et la courbure se montre ?? dans la déviation d'une géodésique par rapport à une géodésique proche (accélération relative de particules test)." Pour rendre précise cette proposition ??, commençons par quantifier la "déviations" ou "accélération relative" de géodésiques proches. Focus ?? attention sur une famille de géodésiques $P(\lambda, n)$; voir figure 8.4. Le paramètre variable ?? n ("paramètre ??") distingue une géodésique de la suivante. Pour n fixé, $P(\lambda, n)$ est une géodésique de paramètre affine λ avec un vecteur tangent

$$\mathbf{u} = \partial P / \partial \lambda \tag{8.5}$$

ainsi $\nabla_u u = 0$ (équation des géodésiques). Le vecteur

$$\mathbf{n} \equiv \partial P / \partial n \tag{8.6}$$

mesure la séparation entre les points avec la même valeur de λ sur des géodésiques voisines. Un observateur tombant librement le long d'une "géo fiducial ?? " $n = 0$ regarde une particule test tombant le long de la "géo test" $n = 1$. Il quantifie ?? la vitesse de la particule test relativement à lui par

Chapitre 9

Topologie différentielle

- 9.1 objets géométriques dans un espace-temps avec metric-free geodesic-free
- 9.2 "vecteur" et "dérivée directionnelle" raffiné en vecteur tangent
- 9.3 bases, composantes, et lois de transformation pour les vecteurs
- 9.4 1-formes
- 9.5 tenseurs
- 9.6 commutateurs et techniques picturales
- 9.7 variétés et topologie différentielle

Chapitre 10

Géométrie affine : géodésiques, transport parallèle et dérivée covariante

10.1 géodésiques et le principe d'équivalence

$$\lambda_{nouveau} = a\lambda_{ancien} + b \quad (10.1)$$

10.2 transport parallèle et dérivées covariantes : approche picturale

boîte 10.1 géodésiques

Soit un point et un vecteur tangent ; soit une courbe unique paramétrisée affinement ("géodésique").

La ligne d'univers d'une particule test neutre ("la théorie géométrique de gravité d'Einstein"; aussi "translation de Cartan de la théorie de gravité de Newton en termes géométriques") :

- (1) "soit un point" : un événement de cette ligne d'univers ;
- (2) "soit un vecteur tangent" : vecteur ("déplacement par augmentation d'une unité de paramètre") tangent à la ligne d'univers à un instant défini par cet événement
- (3) "une courbe unique" : chaque particule test neutre avec une position initiale spécifiée et une vitesse initiale spécifiée suit la même ligne d'univers, indépendamment de sa composition et indépendamment de sa masse (petite ; masse de test ! ; "principe d'équivalence faible de Einstein-Eötvös-Dicke") ;
- (4) "paramètre affine" : dans la théorie de Cartan-Newton, le "temps universel" de Newton (qui est mesuré par de "bonnes" horloges) ; dans le monde physique réel, "le temps propre" (comme mesuré par de "bonnes" horloges) le long d'une géodésique de type temps ;
- (5) "courbe paramétrisée" : (a) un paramètre affine unique à une transformation de la forme $\lambda \rightarrow a\lambda + b$ près, où a et b sont des constantes (aucun arbitraire le long de la géodésique autre que le zéro du paramètre et l'unité du paramètre) ; ou, de manière équivalente (b) soient trois événements A, B, C sur une géodésique, on peut trouver par une construction physique bien déterminée ("clocking?") un unique quatrième événement D sur la géodésique tel que $(\lambda_D - \lambda_C)$ est égal à $(\lambda_B - \lambda_A)$ ou, de manière équivalente (c) [version différentielle] soit un vecteur tangent avec les composantes $(dx^\alpha/d\lambda)_A$ au point A, on peut trouver par construction physique (encore "clocking?") "le même vecteur tangent" au point C avec des composantes déterminées de manière unique $(dx^\alpha/d\lambda)_C$ (vecteur "égal" ; les composantes d'ordinaire non égales à cause de la torsion et de la rotation des vecteurs de base arbitraire entre A et C).

10.3 transport parallèle et dérivées covariantes : approche abstraite**10.4 transport parallèle et dérivées covariantes : approche en composante**

$$S^\alpha{}_{\beta\gamma;\delta} = S^\alpha{}_{\beta\gamma,\delta} + S^\mu{}_{\beta\gamma}\Gamma^\alpha{}_{\mu\delta} - S^\alpha{}_{\mu\gamma}\Gamma^\mu{}_{\beta\delta} - S^\alpha{}_{\beta\mu}\Gamma^\mu{}_{\gamma\delta} \quad (10.2)$$

$$S^\alpha{}_{\beta\gamma,\delta} \equiv e_\delta[S^\alpha{}_{\beta\gamma}] \equiv \partial_{e_\delta} S^\alpha{}_{\beta\gamma} \quad (10.3)$$

$$\frac{DS^\alpha{}_{\beta\gamma}}{d\lambda} = \frac{dS^\alpha{}_{\beta\gamma}}{d\lambda} + S^\mu{}_{\beta\gamma}\Gamma^\alpha{}_{\mu\delta}u^\delta - S^\alpha{}_{\mu\gamma}\Gamma^\mu{}_{\beta\delta}u^\delta - S^\alpha{}_{\beta\mu}\Gamma^\mu{}_{\gamma\delta}u^\delta \quad (10.4)$$

10.5 équation géodésique

$$\frac{d^2x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta}\frac{dx^\gamma}{d\lambda}\frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \quad (10.5)$$

$$\nabla_u v = 0 \Leftrightarrow \frac{dv^\alpha}{d\lambda} + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta}v^\gamma\frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0 \quad (10.6)$$

Chapitre 11

Déviations géodésiques et courbure d'espace-temps

11.1 courbure, enfin

11.2 accélération relative des géodésiques environnantes

Focaliser votre attention sur une famille de géodésiques (11.1). Laissons les géodésiques être différenciées les unes des autres par la valeur d'un "paramètre de sélection" n . La famille inclut non seulement les géodésiques $n=0, 1, 2, \dots$ mais aussi les géodésiques pour toutes les valeurs intervenant de n .

boîte 11.1 déviation géodésique et courbure de Riemann en bref

[...]

a

b

c

d

$$G_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}g^{\sigma\tau}R^{\alpha}{}_{\sigma\alpha\tau}$$

e insère dans les équations d'Einstein (chapitre 17 ??)

$$G_{\mu\nu} = 0 \quad (\text{espace vide})$$

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (\text{quand la mass-energy est présente})$$

f

Le point typique \mathcal{P} sur la géodésique typique sera une fonction continue doublement différentiable du paramètre de sélection n et du paramètre affine λ ; ainsi

$$P = P(\lambda, n) \tag{11.1}$$

le vecteur tangent

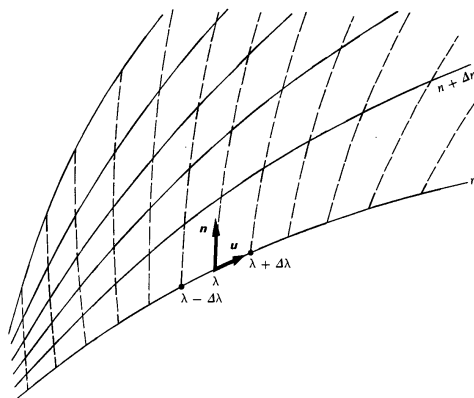
$$\mathbf{u} = \frac{\partial P}{\partial \lambda} \text{ notation de Cartan}$$

$$\mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \text{ notation de ce livre} \tag{11.2}$$

est constant le long de n'importe quelle géodésique en ce sens : le vecteur \mathbf{u} en n'importe quel point, transporté parallèlement à lui-même le long de la géodésique, arrive au second point en coïncidence en direction et longueur avec le \mathbf{u} déjà existant en ce point.

FIGURE 11.1 – Une famille de géodésiques à un paramètre.

"Le paramètre de sélection" n détermine la géodésique. Le paramètre affine λ détermine l'endroit sur la géodésique. Les deux vecteurs tangents indiqués sur le diagramme sont $\mathbf{u} = \partial/\partial\lambda$ (Cartan : $\partial\mathcal{P}/d\lambda$) et $\mathbf{n} = \partial/\partial n$ (Cartan : $\partial\mathcal{P}/\partial n$).



Le "vecteur de séparation"

$$\mathbf{n} = \frac{\partial P}{\partial n} \text{ notation de Cartan}$$

ou

$$\mathbf{n} = \frac{\partial}{\partial n} \text{ notation de ce livre} \tag{11.3}$$

[...]

$$\tag{11.4}$$

boîte 11.2 déviation géodésique représentée comme une flèche

[...]

$$(\text{ vecteur de l'accélération relative }) = \nabla_{\mathbf{u}} \nabla_{\mathbf{u}} \mathbf{n} \tag{11.5}$$

11.3 forces gravitationnelles de marée et tenseur de courbure de Riemann

boîte 11.3 déviation géodésique : flèche corrélée avec une dérivée seconde covariante

[...]

(11.6)

(11.7)

(11.8)

(11.9)

boîte 11.4 accélération relative de particules test – analyse géométrique patterned ?? sur une analyse newtonienne

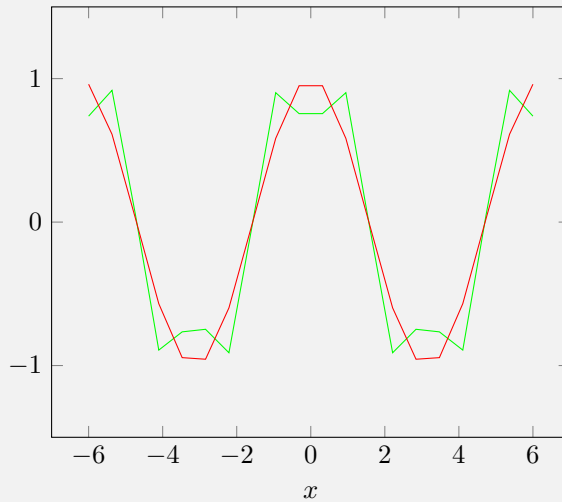
analyse newtonienne

1. Considère une famille de trajectoires de particule test $x^j(t, n)$ dans un espace ordinaire à trois dimensions : "t" est une mesure du temps par l'horloge de la particule, ou n'importe quelle horloge ; "n" est un "paramètre sélecteur".

analyse géométrique

- 1.
- 1.
- 1.
- 1.
- 1.
- 1.
1. é

$$f(x) = \sum_{j=0}^{j=1} (-1)^j \cos((2j + 1) * x * 180 / 3.14) / (2j + 1)$$



- 1.
- 1.
- 1.
- 1.
- 1.
- 1.
- 1.

boîte 11.5 tenseur de courbure de Riemann

[...]

[...]

(11.10)

(11.11)

(11.12)

exercice 11.1 $[\nabla_A, \nabla_B]C$ dépend des dérivées de C (fondé sur la boîte 11.5). Soient $C_{nouveau}$ et C_{ancien} des champs de vecteur reliés par $C_{nouveau}(P) = f(P)C_{ancien}(P)$, f fonction arbitraire excepté $f(P_0) = 1$ Montrer que $\{[\nabla_A, \nabla_B]C_{nouveau}\}_{\grave{a} P_0} - \{[\nabla_A, \nabla_B]C_{ancien}\}_{\grave{a} P_0} = C_{ancien} \nabla_{[A, B]}f$

$$\{[\nabla_A, \nabla_B]C_{nouveau}\} = \{[\nabla_A, \nabla_B](f(P)C_{ancien}(P))\}$$

$$\nabla_A \nabla_B (CD) = \nabla_A (C \nabla_B D + D \nabla_B C) = \nabla_A C \nabla_B D + C \nabla_A \nabla_B D + \nabla_A D \nabla_B C + D \nabla_A \nabla_B C$$

$$\nabla_B \nabla_A (CD) = \nabla_B C \nabla_A D + C \nabla_B \nabla_A D + \nabla_B D \nabla_A C + D \nabla_B \nabla_A C$$

$$[\nabla_A, \nabla_B](CD) = \nabla_A \nabla_B (CD) - \nabla_B \nabla_A (CD) = \nabla_A C \nabla_B D + C \nabla_A \nabla_B D + \nabla_A D \nabla_B C + D \nabla_A \nabla_B C -$$

$$[\nabla_B C \nabla_A D + C \nabla_B \nabla_A D + \nabla_B D \nabla_A C + D \nabla_B \nabla_A C] = C \nabla_A \nabla_B D + D \nabla_A \nabla_B C - [C \nabla_B \nabla_A D + D \nabla_B \nabla_A C]$$

$$\text{Donc } [\nabla_A, \nabla_B](CD) = C[\nabla_A, \nabla_B]D + D[\nabla_A, \nabla_B]C$$

$$\text{Donc } \{[\nabla_A, \nabla_B]C_{nouveau}\}_{\grave{a} P_0} = \{[\nabla_A, \nabla_B]C_{ancien}\}_{\grave{a} P_0} + C_{ancien}(P_0)(\nabla_{[A, B]}f)(P_0)$$

exercice 11.2 prouve que Riemann est un tenseur**exercice 11.3** composantes de Riemann en base de coordonnées**exercice 11.4** composantes de Riemann en base sans coordonnées**11.4** transport parallèle autour d'une courbe fermée

(11.13)

(11.14)

(11.15)

boîte 11.6 déviation géodésique et transport parallèle autour d'une courbe fermée : deux aspects de la même construction

exercice 11.5 coplanéité de courbes fermées

boîte 11.7 la loi pour le transport parallèle ?? courbes fermées

11.4.1 cas particulier

11.4.2 cas général

11.5 la planéité est équivalente à une courbure de Riemann nulle

Dire que l'espace ou l'espace-temps ou tout autre variété est plate, revient à dire qu'il existe un système de coordonnées $\{x^\alpha(P)\}$ dans lequel toutes les géodésiques apparaissent droites :

$$x^\alpha(\lambda) = a^\alpha + b^\alpha \lambda \quad (11.16)$$

(11.17)

(11.18)

(11.19)

[...] Pour toutes les géodésiques, être droit dans un système de coordonnées donné signifie que les géodésiques initialement parallèles conservent leur séparation ; la déviation géodésique est nulle ; et ainsi la courbure disparaît.]

Est-ce que le contraire est vrai ? Est-ce qu'une courbure de Riemann nulle implique l'existence d'un système de coordonnées dans lequel toutes les géodésiques apparaissent droites ? Oui, comme on peut le voir par la construction suivante.

Transportes un vecteur parallèlement à lui-même de P_0 à L puis revient de L à P_0 le long d'une route légèrement différente. Il revient à son point de départ avec aucune altération en longueur ou direction, parce que **Riemann** disparaît partout. Ainsi un transport parallèle d'un vecteur de base e_μ de P_0 à L produit à L une base vecteurs e_μ qui est indépendante, en magnitude et en direction, de la route de transport (pour les routes obtenables de l'une à l'autre par n'importe quelle séquence continue de déformations).

De même que pour L , pour tous les points de la variété ;

le transport parallèle d'une base $\{e_\alpha(P_0)\}$ produit partout un champ de référentiels (??), pour lequel chaque vecteur de base ne subit aucun changement (relativement au champ de référentiel) lors d'un transport parallèle de n'importe quel point jusqu'à n'importe quel point proche ; ainsi,

$$\nabla e_\mu = 0 \quad (11.20)$$

ou

$$\nabla_\nu e_\mu (\equiv \nabla_{e_\nu} e_\mu) = 0 \quad (11.21)$$

Avec la disparition de ces dérivées individuelles, disparaissent aussi le commutateur de n'importe quels champs ce vecteur de base :

$$[e_\mu, e_\nu] = \nabla_\mu e_\nu - \nabla_\nu e_\mu = 0 - 0 = 0 \quad (11.22)$$

(11.23)

(11.24)

(11.25)

(11.26)

11.6 coordonnées normales de Riemann

[...]

$$e_\alpha(P_0) = (\partial/\partial x^\alpha)_{P_0} \quad (11.27)$$

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(P_0) = 0 \quad (11.28)$$

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma,\mu}(P_0) = -\frac{1}{3}(R^\alpha_{\beta\gamma\mu} + R^\alpha_{\gamma\beta\mu}) \quad (11.29)$$

Si l'espace-temps a une métrique (comme il l'a en réalité), et si le référentiel de l'observateur à P_0 a été choisi orthonormal ($e_\alpha \hat{e}_\beta = \eta_{\alpha\beta}$), alors

$$g_{\alpha\beta}(P_0) = \eta_{\alpha\beta} \quad (11.30)$$

$$g_{\alpha\beta,\mu}(P_0) = 0 \quad (11.31)$$

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta,\mu\nu}(P_0) &= -\frac{1}{3}(R_{\alpha\mu\beta\nu} + R_{\alpha\nu\beta\mu}) \\ &= -\frac{2}{3}J_{\alpha\beta\mu\nu} \end{aligned} \quad (11.32)$$

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta}(P_0) = g_{\alpha\delta,\beta\gamma}(P_0) - g_{\alpha\gamma,\beta\delta}(P_0)$$

exercice 11.6 coplanéité de courbes fermées

exercice 11.7

$$\begin{aligned} R^\alpha_{\beta\gamma\delta} &= R^\alpha_{\beta[\gamma\delta]} \\ R^\alpha_{[\beta\gamma\delta]} &= 0 \end{aligned} \quad (11.33)$$

(11.34)

(11.35)

$$J^\mu_{\nu\alpha\beta} = J^\mu_{\nu\beta\alpha} = \frac{1}{2}(R^\mu_{\alpha\nu\beta} + R^\mu_{\beta\nu\alpha}) \quad (11.36)$$

$$R^\mu_{\alpha\nu\beta} = \frac{2}{3}(J^\mu_{\nu\alpha\beta} - J^\mu_{\beta\alpha\nu}) \quad (11.37)$$

$$R^\alpha_{\beta[\gamma\delta;\epsilon]} = 0 \quad (11.38)$$

Chapitre 12

La gravité newtonienne dans le langage de l'espace-temps courbé

- 12.1 gravité newtonienne en bref
- 12.2 stratification de l'espace-temps newtonien
- 12.3 systèmes de coordonnées galiléennes
- 12.4 formulation géométrique sans coordonnées de la gravité newtonienne
- 12.5 la vision géométrique de la physique : une critique

Chapitre 13

La géométrie riemaniene : la métrique comme fondation de tout

13.1 nouvelles caractéristiques imposées sur la géométrie par la validité locale de la relativité spéciale

(13.1)

(13.2)

(13.3)

(13.4)

(13.5)

(13.6)

(13.7)

(13.8)

(13.9)

(13.10)

(13.11)

(13.12)

(13.13)

(13.14)

(13.15)

(13.16)

(13.17)

(13.18)

(13.19)

(13.20)

(13.21)

(13.22)

(13.23)

(13.24)

(13.25)

(13.26)

(13.27)

(13.28)

(13.29)

(13.30)

(13.31)

(13.32)

(13.33)

(13.34)

(13.35)

(13.36)

(13.37)

(13.38)

(13.39)

13.2 métrique

??

Seconde distillation : les distances entre les points proches en terme de métrique

Idéalise la surface de la terre comme lisse. Alors dans n'importe quelle région limitée la géométrie est euclidienne. Cette circonstance a une conséquence heureuse. Il est suffisant de connaître quelques distances entre les points proches pour être capable de déterminer toutes les distances entre les points proches.

??

13.3 accord entre les géodésiques de la géométrie de l'espace-temps courbé et les lignes droites de la géométrie de lorentz locale

.. Qu'est-ce que la métrique (ou l'intervalle d'espace-temps) a à faire avec une géodésique (ou une ligne d'univers d'une particule test) ? réponse :

deux objets mathématiques ("lignes droites dans un référentiel de Lorentz local" et " géodésique de la géométrie d'espace-temps courbé??) égaux au même objet physique ("ligne d'univers d'une particule test ") doivent être égaux entre eux ("condition de consistence").

..

13.4 géodésiques comme lignes d'univers du temps propre extrême

FIGURE 13.1 – figure 13.2

Une étoile oscillant dans les deux sens à travers le plan du disque de la galaxie, comme un exemple d'une situation où deux événements A et B peuvent être connectés par plus d'une géodésique. Gauche en haut : la galaxie vue au bord??, montrant (ligne pointillée) le chemin de l'étoile en question. Renvoyé à un référentiel local prenant?? avec la révolution générale du proche disque d'étoiles. En haut à droite : le potentiel effectif sentis par l'étoile,

selon la théorie de la gravitation newtonienne, est comme celle expérimentées par une balle qui roule vers le bas sur un plan incliné et remonte sur un autre (" chute libre vers un plan galactique" avec l'accélération $g = \frac{1}{2}$ dans les unités utilisées ici). Les trois centrales ?? : les lignes d'univers possible et impossible pour l'étoile connectant deux événements donnés A (plan de la galaxie à $t = 0$) et B (plan de la galaxie à $t = 2$). A droite : envoie l'étoile à partir du plan galactique avec assez de vitesse pour juste revenir en arrière au plan à $t = 2$. A gauche : envoie l'étoile à partir du plan galactique avec la moitié de la vitesse et il reviendra en la moitié du temps (très contraire au comportement d'une oscillation harmonique simple, mais en accord avec le potentiel v-shaped de la galaxie!), étant ainsi capable de faire deux excursions dans le temps alloué entre A et B . Au centre : une ligne d'univers concevable (concevable avec une propulsion de fusée!) mais pas une géodésique. En bas : comparaison ???

$$z = a_1 \sin(\pi t/2) + a_2 \sin(2\pi t/2)$$

?? Détails : dans le contexte de la relativité générale, prenez une ligne d'univers arbitraire qui connecte A et B , évalue l'écart de temps propre, répète pour les autres lignes d'univers, et dit qu'une ligne d'univers donnée représente un déplacement possible ("géodésique") quand pour elle le temps propre est un extrémum en ce qui concerne toutes les lignes d'univers proche. Dans l'approximation newtonienne, la différence entre l'écart de temps propre et l'écart ($t_B - t_A$) de la coordonnée de temps est tout ce qui vient ??? dans la forme de "l'intégrale d'action" (sur une base "par unité de masse")

$$I = \int_A^B [(\text{énergie cinétique}) - (\text{énergie potentielle})] dt = \int_A^B \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 - |z| \right] dt$$

13.5 propriétés de Riemann induites par la géométrie

Dans l'espace-temps newtonien, dans le réel espace-temps physique d'Einstein, - en fait dans toute variété avec une dérivée covariante,- le tenseur de courbure de Riemann a ces symétries (exercice 11.7) :

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} \equiv R^\alpha{}_{\beta[\gamma\delta]} \text{ (antisymétrie sur les deux derniers indices)} \tag{13.40}$$

$$R^\alpha{}_{[\beta\gamma\delta]} \equiv 0 \text{ (disparition de la partie complètement antisymétrique)} \tag{13.41}$$

En plus il satisfait une identité différentielle (exercice ??) :

$$R^\alpha{}_{\beta[\gamma\delta;\epsilon]} \equiv 0 \text{ ("identités de Bianchi")} \tag{13.42}$$

(voir chapitre 15 pour la signification géométrique).

Quand la métrique est amenée sur la scène, que ce soit dans l'espace-temps d'Einstein ou ailleurs, elle impose au **Riemann** la symétrie additionnelle (exercice ??)

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv R_{[\alpha\beta]\gamma\delta} \text{ ("antisymétrie sur les deux premiers indices")} \tag{13.43}$$

Ceci, avec 13.40 et 13.41, forme un ensemble complet de symétries pour **Riemann** ; les autres symétries qui suivent à partie d'elles (exercice ??) sont

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} \equiv R_{\gamma\delta\alpha\beta} \text{ ("symétrie avec échange de paire")} \tag{13.44}$$

et

$$R_{[\alpha\beta\gamma\delta]} \equiv 0 \text{ (disparition de la partie complètement antisymétrique)} \tag{13.45}$$

Ces symétries réduisent le nombre de composantes de **Riemann** de $4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$ à 20 (exercice ??).

Avec une métrique présente, on peut construire une variété de nouveaux tenseurs de courbure depuis **Riemann**. Certains qui vont jouer des rôles importants plus tard comme suit.

$$G^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} \equiv \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\mu\nu} R_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} \frac{1}{2}\epsilon_{\rho\sigma\gamma\delta} = -\frac{1}{4}\delta_{\rho\sigma\gamma\delta}^{\alpha\beta\mu\nu} R_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} \quad (13.46)$$

(exercice ??)

(2) *Le tenseur de courbure d'Einstein*, qui est symétrique (exercice ??)

$$G^{\beta}{}_{\delta} \equiv G^{\mu\beta}{}_{\mu\delta}; \quad G_{\beta\delta} = G_{\delta\beta} \quad (13.47)$$

(3) *Le tenseur de courbure de Ricci*, qui est symétrique et le scalaire de courbure

$$R^{\beta}{}_{\delta} \equiv R^{\mu\beta}{}_{\mu\delta}, \quad R_{\beta\delta} = R_{\delta\beta}; \quad R \equiv R^{\beta}{}_{\beta} \quad (13.48)$$

qui est relié au tenseur d'Einstein par (exercice ??

$$R^{\beta}{}_{\delta} = G^{\beta}{}_{\delta} + \frac{1}{2}R\delta^{\beta}{}_{\delta} \quad (13.49)$$

(4) *le tenseur conforme de Weyl* (exercice ??)

$$C^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} = R^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} - 2\delta^{[\alpha}{}_{[\gamma} R^{\beta]}{}_{\delta]} + \frac{1}{3}\delta^{[\alpha}{}_{[\gamma} \delta^{\beta]}{}_{\delta]} R \quad (13.50)$$

L'identité de Bianchi 13.42 prend une forme particulière une fois réécrite en termes du double dual \mathbf{G} :

$$G_{\alpha\beta\gamma}{}^{\delta}{}_{;\delta} \equiv 0 \quad (\text{"identité de Bianchi"}) \quad (13.51)$$

(exercice ??); et il a une conséquence évidente

$$G_{\alpha}{}^{\beta}{}_{;\beta} \equiv 0 \quad (\text{"identité de Bianchi contractée"}) \quad (13.52)$$

Le chapitre 15 sera consacré à la signification géométrique profonde de ces identités de Bianchi.

13.6 Le repère propre de référence d'un observateur accéléré

Chapitre 14

calcul de la courbure

14.1 la courbure comme outil pour comprendre la physique

[..]

$$ds^2 = -(x/3^{1/2}L + y^2/12L^2)^{-3^{1/2}} \left(\int \frac{vdz}{z} \right)^{-1} (-z/L)^{3^{-1/2}} dt^2.. \quad (14.1)$$

Boîte 14.1 perspectives sur la courbure 1. point historique de départ : une ligne courbe sur un plan. Il n'y a aucune façon de définir la courbure d'une ligne par des mesures confinées à ("intrinsèquement") la ligne elle-même. On a besoin, par exemple, de l'angle azimuthal θ du vecteur tangent relatif à une direction fixée dans le plan, comme fonction de la distance propre s mesurée le long de la courbe ; ainsi, $\theta = \theta(s)$. Alors la courbure κ et sa réciproque, le rayon de courbure ρ , sont donnés par $\kappa(s) = 1/\rho(s) = d\theta(s)/ds$. Alternativement, on peut examiner au départ, $y, ??$ comme une fonction de la distance x mesurée le long de cette ligne tangente ; alors $\kappa = 1/\rho = d^2y/dx^2$.

2. Ce concept fut plus tard étendu à une surface courbe ?? dans un 3-espace plat (euclidien). Au départ, z , de la surface courbe smoothéede la surface plate tangente à un point donné est décrite dans le voisinage de ce point par l'expression quadratique

$$z = \frac{1}{2}ax^2 + bxy + \frac{1}{2}cy^2$$

La rotation des axes d'un angle approprié α ,

$$x = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha,$$

$$y = -\xi \sin \alpha + \eta \cos \alpha;$$

se réduit à l'expression

$$z = \frac{1}{2}\kappa_1\xi^2 + \frac{1}{2}\kappa_2\eta^2$$

avec

$$\kappa_1 = 1/\rho_1$$

$$\kappa_2 = 1/\rho_2$$

représentant les 2 "principales courbures" de la surface.

3. Gauss(1827) a conçu l'idée de définir la courbue par des mesures confinées entièrement à la surface ("société de fourmis"). A partir d'un point P sur la surface, [..] Répète, en commençant au point original mais en procédant dans d'autres directions. [..]

$$ds^2 = dz^2 + d\xi^2 + d\eta^2 (3 - \text{espace euclidien}) \\ = [(\kappa_1\xi d\xi + \kappa_2\eta d\eta)^2 + (d\xi^2 + d\eta^2)] \text{ (métrique intrinsèque de la 2-géométrie courbe)}$$

on peut calculer les résultats d'une telle mesure intrinsèque. On calcule que la circonférence diffère de la valeur euclidienne $2\pi\epsilon$, par uen correction fractionnelle qui est proportionnelle au carré de ϵ , spécifiquement,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{6}{\epsilon^2} \left(1 - \frac{\text{circonférence}}{2\pi\epsilon} \right) = \kappa_1\kappa_2 = \frac{1}{\rho_1\rho_2} = \det \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

4. Le contraste entre courbure extrinsèque et courbure intrinsèque est résumée dans les termes,

$$\text{courbure extrinsèque} = \kappa = (\kappa_1 + \kappa_2)(cm^{-1}),$$

$$\text{courbure intrinsèque, gaussienne} = \kappa_1 \kappa_2 (cm^{-2})$$

[..] Dessine un triangle 3 : 4 : 5 sur un morceau plat de papier ; ensuite courbe le papier. La 2-géométrie euclidienne intrinsèque du morceau de papier est préservée par ce ?? . La courbure intrinsèque gaussienne de la surface reste non changée ; elle garde la valeur euclidienne de zéro (κ_2 non nulle, produit $\kappa_1 \kappa_2 = zero$). Par ailleurs, la courbure extrinsèque est changée de $\kappa_1 + \kappa_2 = 0$ à une valeur non nulle, $\kappa_1 + \kappa_2 \neq 0$

5.

6.

7. La rotation d'un vecteur transporté parallèlement à lui-même autour d'un circuit fermé apporte une définition de la courbure utilisable en 4 et 3 dimensions comme à 2. (Dans la géométrie à deux dimensions courbes, à un point il y a seulement un plan. Par conséquent seulement un nombre est nécessaire pour décrire ici la courbure de Gauss. En 3 et 4 dimensions, il y a plus de plans indépendants à travers un point et donc plus de nombres sont nécessaires pour décrire la courbe.) Dans le diagramme, commencer avec un vecteur à la position 1 (pole nord). Le transporter parallèlement à lui-même (position 2,3...) autour d'un triangle sphérique $90^0 - 90^0 - 90^0$. Il revient au point de départ (position 4) tourné de 90^0 :

$$\text{courbure de Gauss} = \frac{\text{angle dont il est tourné}}{\text{aire entourée}} = \frac{\pi/2}{(1/8)(4\pi a^2)} = \frac{1}{a^2}$$

[..] 8.

9. La 2-forme de courbure pour la surface illustrée de la symétrie rotationnelle ("??") avec la métrique $ds^2 = d\sigma^2 + r^2(\sigma)d\Phi^2$ est

$$\text{courbure} = -\frac{1}{r} \frac{d^2 r}{d\sigma^2} d\sigma \wedge r d\Phi$$

14.2 en formant le tenseur d'einstein

14.3 calcul plus efficace

14.4 la méthode lagrangienne géodésique ??

14.5 les 2-formes de la courbure

14.6 calcul de la courbure en utilisant les formes différentielles extérieures

Chapitre 15

IDENTITES DE BIANCHI ET LA FRONTIERE DE LA FRONTIERE

15.0.1 Les identités de Bianchi en bref

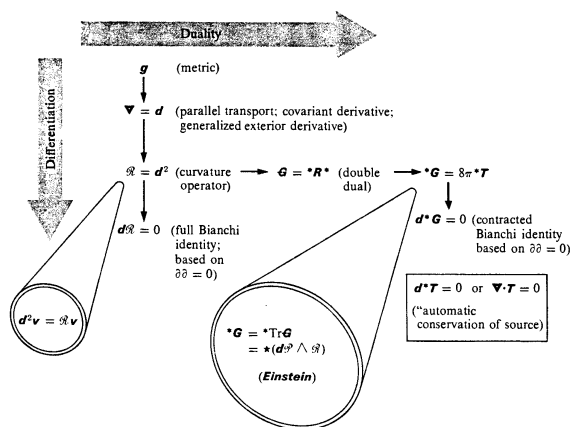
En électrodynamique, il y a 4 potentiels qui sont unifiés dans la 1-forme $\mathbf{A} \equiv A_\mu dx^\mu$. De cette quantité suit par différenciation le **Faraday**, $\mathbf{F} = d\mathbf{A}$. Ce champ satisfait l'identité $d\mathbf{F} = 0$ (identité, oui; [...]) En gravitation il y a 10 potentiels (les coefficients de métrique $g_{\mu\nu}$) qui sont unifiés dans le tenseur métrique $g = g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu$. De cette quantité par deux différenciations suit l'opérateur de courbure

$$R = \frac{1}{4} e_\mu \wedge e_\nu R^{\mu\nu}{}_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

Cette opérateur de courbure satisfait l'identité de Bianchi $dR = 0$, où maintenant "d" est une généralisation de la dérivée extérieure de Cartan, décrite plus complètement au Chapitre 14 (encore une identité, mais encore une qui [...] à la définition d'une source conservée).

En électromagnétisme, on doit aller au dual, $*F$, [...] $d*F = 4\pi *J$. La conservation de la source, $d*J = 0$, apparaît comme une conséquence de l'identité $dd*F = 0$; [...]

I. Structure of Geometroynamics in Outline Form



$$d^*T = 0$$

où

$$*T \equiv e_\mu T^\mu{}_\nu (*\omega^\nu) = e_\mu T^{\mu\nu} d^3\Sigma_\nu$$

Cette loi de conservation arrive comme une conséquence de "l'identité de Bianchi contractée", $d^*G = 0$, encore interprétable en termes de vanishing de la frontière de la frontière

15.0.2 L'identité de Bianchi $dR = 0$ comme une manifestation de 'la frontière de la frontière = 0'

(15.1)

(15.2)

(15.3)

$$R^\alpha_{\beta yz;x} + R^\alpha_{\beta zx;y} + R^\alpha_{\beta xy;z} = 0 \quad (15.4)$$

[..]

$$F_{[\lambda\mu;\nu]} = F_{[\lambda\mu;\nu]} = 0 \quad (15.5)$$

15.0.3 moment de rotation : la clé des identités de bianchi contractées

[..] un corps rigide ne va rester au repos à moins que toutes les forces agissant sur lui est une somme nulle :

$$\sum_i F^{(i)} = 0 \quad (15.6)$$

Bien que nécessaire, cette condition n'est pas suffisante. La somme des moments de ces forces à un point P doit aussi être zéro :

$$\sum_i (P^{(i)} - P) \wedge F^{(i)} = 0 \quad (15.7)$$

15.0.4 calcul du moment de rotation

[..]

(15.8)

(15.9)

(15.10)

(15.11)

(15.12)

(15.13)

(15.14)

(15.15)

$$(\text{momentderotation}) = \star(dP \wedge R) = e_\sigma (*R^*)_{\nu}^{\sigma\nu\tau} d^3\Sigma_\tau \quad (15.16)$$

$$dx^\nu \wedge dx^\alpha \wedge dx^\beta = \epsilon^{\nu\alpha\beta\tau} d^3\Sigma_\tau \quad (15.17)$$

(15.18)

(15.19)

(15.20)

(15.21)

(15.22)

(15.23)

(15.24)

(15.25)

(15.26)

$$G = e_\sigma G^{\sigma\tau} e_\tau = 8\pi_\sigma T^{\sigma\tau} e_\tau = 8\pi T \quad (15.27)$$

ou, en langage de composantes,

$$G^{\sigma\tau} = 8\pi T^{\sigma\tau} \quad (15.28)$$

15.0.5 conservation du moment de rotation [..]

15.0.6 conservation du moment de rotation exprimé en forme différentielle

15.0.7 de la conservation du moment de rotation à la géométrie d'Einstein : une ??

Quatrième partie

**LA THEORIE GEOMETRIQUE DE LA
GRAVITATION D'EINSTEIN**

Chapitre 16

Principe d'équivalence et mesure du "champ gravitationnel"

16.1 vue d'ensemble

16.2 les lois de la physique dans un espace-temps courbé

$$\nabla_p p = 0 \tag{16.1}$$

Chapitre 17

Comment la masse-énergie génère la courbe

- 17.1 conservation automatique de la source comme idée centrale dans la formulation de l'équation du champ
- 17.2 conservation automatique de la source : une nécessité dynamique
- 17.3 constante cosmologique
- 17.4 la limite newtonienne
- 17.5 théorie axiomatique d'Einstein
- 17.6 "aucune géométrie préalable" : une caractéristique distinguant la théorie d'Einstein d'autres théories de la gravité
- 17.7 un goût de l'histoire de l'équation d'Einstein

Chapitre 18

Champs gravitationnels faibles

18.1 la théorie de la gravité linéarisée

A cause du langage géométrique et des abréviations utilisées pour les écrire, les équations de champ d'Einstein, $G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$, ne semblent presque pas être des équations différentielles, ?? La meilleure façon de voir qu'elles le sont est de les appliquer aux situations de champ faible

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1 \quad (18.1)$$

, par exemple au système solaire, où $|h_{\mu\nu}| \sim |\Phi| \lesssim M_{\odot}/R_{\odot} \sim 10^{-6}$; ou à une onde gravitationnelle de propagant à travers l'espace interstellaire.

Dans une situation de champ faible, on peut étendre les équations de champ en puissance de $h_{\mu\nu}$, en utilisant un système de coordonnées où 18.1 ??; et sans trop de perte de précision, on peut garder seulement les termes linéaires. ?? En fait, c'est précisément cette "théorie linéarisée" qu'on obtient quand on ?? le champ classique correspondant aux particules de mécanique quantique de (1) masse au repos nulle et (2) de spin 2 dans (3) un espace temps plat ?? . Les lecteurs du Track 2 ont déjà exploré la théorie linéarisée ?? 7.1 Elle venait alors sous le nom alternatif, "théorie de gravité du champ tenseur dans un espace temps plat".

...

Ici l'attention se concentre sur la dérivation de la théorie linéarisée à partir de la relativité générale.

$$\begin{aligned} \Gamma^{\mu}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(h_{\alpha\nu,\beta} + h_{\beta\nu,\alpha} - h_{\alpha\beta,\nu}) \\ &\equiv \frac{1}{2}(h_{\alpha}^{\mu}{}_{,\beta} + h_{\beta}^{\mu}{}_{,\alpha} - h_{\alpha\beta}{}^{,\mu}) \end{aligned} \quad (18.2)$$

La seconde ligne ici introduit la convention, utilisées routinement quand on développe en puissances de $h_{\mu\nu}$, que les indices de $h_{\mu\nu}$ sont montés et descendus en utilisant $\eta^{\mu\nu}$ et $\eta_{\mu\nu}$, pas $g^{\mu\nu}$ et $g_{\mu\nu}$. Une linéarisation similaire du tenseur de Ricci [équation ??] donne

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} &= \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu,\alpha} - \Gamma^{\alpha}_{\mu\alpha,\nu} \\ &= \frac{1}{2}(h_{\mu}{}^{\alpha}{}_{,\nu\alpha} + h_{\nu}{}^{\alpha}{}_{,\mu\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} - h_{,\mu\nu}) \end{aligned} \quad (18.3)$$

où

$$h \equiv h^{\alpha}{}_{\alpha} = \eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta} \quad (18.4)$$

Après une contraction supplémentaire de la forme $R \equiv g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \approx \eta^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$, on trouve les équations d'Einstein, $2G_{\mu\nu} = 16\pi T_{\mu\nu}$ s'écrivent

$$h_{\mu\alpha,\nu}{}^{\alpha} + h_{\nu\alpha,\mu}{}^{\alpha} - h_{\mu\nu,\alpha}{}^{\alpha} - h_{,\mu\nu} - \eta_{\mu\nu}(h_{\alpha\beta}{}^{,\alpha\beta} - h_{,\beta}{}^{\beta}) = 16\pi T_{\mu\nu} \quad (18.5)$$

Le nombre de termes a augmenté en passant de $R_{\mu\nu}$ (18.3) to $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$ (18.5), mais ce problème peut être contré en définissant

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \quad (18.6)$$

[...]

boîte 18.1 dérivations de la relativité générale depuis le point de vue géométrique et le point de vue de spin deux, comparé et contrasté

Ainsi $G_{\mu\nu} = \bar{R}_{\mu\nu}$ au premier ordre en $h_{\mu\nu}$ et $\bar{\bar{h}}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$; c'est-à-dire $h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}$. Avec cette notation, les équations de champ linéarisées deviennent

$$-\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^\alpha - \eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\alpha\beta}{}^{\alpha\beta} + \bar{h}_{\mu\alpha}{}^\alpha{}_\nu + \bar{h}_{\nu\alpha}{}^\alpha{}_\mu = 16\pi T_{\mu\nu} \quad (18.7)$$

[...] On peut imposer les conditions de jauge

$$\bar{h}^{\mu\alpha}{}_{,\alpha} = 0 \quad (18.8)$$

Les équations de champ 18.7 deviennent alors

$$-\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^\alpha = 16\pi T_{\mu\nu} \quad (18.9)$$

Les conditions de jauge (18.8), les équations de champ (18.9) et la définition de la métrique

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h} \quad (18.10)$$

sont les équations fondamentales de la théorie de la gravitation linéarisées dans la jauge de Lorentz.

exercice 18.1 titre

$$\begin{aligned} R^\sigma{}_{\mu\nu\kappa} &= \frac{\partial\Gamma^\sigma{}_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} + \Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\mu\kappa} - \Gamma^\sigma{}_{\kappa\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \\ \Gamma^\mu{}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(h_{\alpha\nu,\beta} + h_{\beta\nu,\alpha} - h_{\alpha\beta,\nu}) \equiv \frac{1}{2}(h_{\alpha}{}^\mu{}_{,\beta} + h_{\beta}{}^\mu{}_{,\alpha} - h_{\alpha\beta}{}^{,\mu}) \\ R_{\alpha\mu\nu\kappa} &= \eta_{\alpha\sigma}R^\sigma{}_{\mu\nu\kappa} = \eta_{\alpha\sigma} \left[\frac{\partial\Gamma^\sigma{}_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} + \Gamma^\sigma{}_{\nu\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\mu\kappa} - \Gamma^\sigma{}_{\kappa\lambda}\Gamma^\lambda{}_{\mu\nu} \right] = \eta_{\alpha\sigma} \left[\frac{\partial\Gamma^\sigma{}_{\mu\kappa}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial\Gamma^\sigma{}_{\mu\nu}}{\partial x^\kappa} \right] + O(h^2) \\ &= \eta_{\alpha\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left[\frac{1}{2}\eta^{\sigma\phi}(h_{\mu\phi,\kappa} + h_{\kappa\phi,\mu} - h_{\mu\kappa,\phi}) \right] - \eta_{\alpha\sigma} \frac{\partial}{\partial x^\kappa} \left[\frac{1}{2}\eta^{\sigma\phi}(h_{\mu\phi,\nu} + h_{\nu\phi,\mu} - h_{\mu\nu,\phi}) \right] + O(h^2) \\ &= \frac{1}{2}\eta^{\sigma\phi}\eta_{\alpha\sigma} [(h_{\mu\phi,\kappa\nu} + h_{\kappa\phi,\mu\nu} - h_{\mu\kappa,\phi\nu}) - \frac{1}{2}\eta^{\sigma\phi}\eta_{\alpha\sigma} [(h_{\mu\phi,\nu\kappa} + h_{\nu\phi,\mu\kappa} - h_{\mu\nu,\phi\kappa})] + O(h^2) \\ &= \frac{1}{2} [h_{\mu\alpha,\kappa\nu} + h_{\kappa\alpha,\mu\nu} - h_{\mu\kappa,\alpha\nu}] - \frac{1}{2} [h_{\mu\alpha,\nu\kappa} + h_{\nu\alpha,\mu\kappa} - h_{\mu\nu,\alpha\kappa}] + O(h^2) \\ &= \frac{1}{2} [h_{\kappa\alpha,\mu\nu} - h_{\mu\kappa,\alpha\nu} - h_{\nu\alpha,\mu\kappa} + h_{\mu\nu,\alpha\kappa}] + O(h^2) \\ R_{\alpha\mu\nu\kappa} &= \frac{1}{2} [h_{\kappa\alpha,\mu\nu} + h_{\mu\nu,\alpha\kappa} - h_{\mu\kappa,\alpha\nu} - h_{\nu\alpha,\mu\kappa}] \end{aligned} \quad (18.11)$$

$$\begin{aligned} R_{\alpha'\mu'\nu'\kappa'} &= \frac{1}{2} [h_{\kappa'\alpha',\mu'\nu'} + h_{\mu'\nu',\alpha'\kappa'} - h_{\mu'\kappa',\alpha'\nu'} - h_{\nu'\alpha',\mu'\kappa'}] \\ &= \frac{1}{2} \left[\Lambda_{\mu'}^\mu \Lambda_{\nu'}^\nu (\Lambda_{\kappa'}^\kappa \Lambda_{\alpha'}^\alpha h_{\kappa\alpha})_{,\mu\nu} + \Lambda_{\kappa'}^\kappa \Lambda_{\alpha'}^\alpha (\Lambda_{\mu'}^\mu \Lambda_{\nu'}^\nu h_{\mu\nu})_{,\alpha\kappa} - \Lambda_{\alpha'}^\alpha \Lambda_{\nu'}^\nu (\Lambda_{\mu'}^\mu \Lambda_{\kappa'}^\kappa h_{\mu\kappa})_{,\alpha\nu} - \Lambda_{\kappa'}^\kappa \Lambda_{\mu'}^\mu (\Lambda_{\nu'}^\nu \Lambda_{\alpha'}^\alpha h_{\nu\alpha})_{,\mu\kappa} \right] = \\ &\Lambda_{\kappa'}^\kappa \Lambda_{\mu'}^\mu \Lambda_{\nu'}^\nu \Lambda_{\alpha'}^\alpha R_{\alpha\mu\nu\kappa} \end{aligned}$$

boîte 18.2 Transformations de jauge et transformations de coordonnées dans la théorie linéarisée

es de la théorie linéarisée écrites dans n'importe quel système de coordonnées qui est à peu près globalement de Lorentz, sont 18.1 et 18.7 :

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad |h_{\mu\nu}| \ll 1$$

$$-\bar{h}_{\mu\nu,\alpha}{}^\alpha - \eta_{\mu\nu}\bar{h}_{\alpha\beta}{}^{\alpha\beta} + \bar{h}_{\mu\alpha}{}^{\alpha}{}_\nu + \bar{h}_{\nu\alpha}{}^{\alpha}{}_\mu = 16\pi T_{\mu\nu}$$

Deux différents types de transformations de coordonnées connectent presque globalement les systèmes de Lorentz entre eux : les transformations globales de Lorentz, et les transformations infinitésimales de coordonnées.

1. *Transformations globales de Lorentz :*

$$x^\mu = \Lambda^\mu{}_{\alpha'} x^{\alpha'}, \quad \Lambda^\mu{}_{\alpha'} \Lambda^{\nu}{}_{\beta'} \eta_{\mu\nu} = \eta_{\alpha'\beta'}$$

Ceci transforme les coefficients de la métrique via

$$\eta_{\alpha'\beta'} + h_{\alpha'\beta'} = g_{\alpha'\beta'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\beta'}} g_{\mu\nu} = \Lambda^\mu{}_{\alpha'} \Lambda^{\nu}{}_{\beta'} (\eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}) = \eta_{\alpha'\beta'} + \Lambda^\mu{}_{\alpha'} \Lambda^{\nu}{}_{\beta'} h_{\mu\nu}$$

Ainsi $h_{\mu\nu}$ - et de même $\bar{h}_{\mu\nu}$ - se transforment comme des composantes d'un tenseur dans un espace plat

$$h_{\alpha'\beta'} = \Lambda^\mu{}_{\alpha'} \Lambda^{\nu}{}_{\beta'} h_{\mu\nu}$$

2 *transformations infinitésimales de coordonnées* (créations de ?? "ripples" dans le système de coordonnées) :

$$x^{\mu'}(\mathcal{P}) = x^\mu(\mathcal{P}) + \xi^\mu(\mathcal{P})$$

où $\xi^\mu(\mathcal{P})$ sont les quatre fonctions arbitraires suffisamment petites pour avoir $|h_{\mu'\nu'}| \ll 1$. Les transformations infinitésimales de cette sorte font des petits changements dans la forme fonctionnelle de tout scalaire, vecteur, et champ de tenseurs. *Exemple* : la température T est une fonction uniquement de la position, $T(\mathcal{P})$; donc ??

[..]

Ces petits changements peuvent être ignorés dans toutes les quantités, sauf pour la métrique, où les petites déviations à $\eta_{\mu\nu}$ contiennent toute l'information sur la gravité. La loi de transformation usuelle de tenseur pour la métrique

$$g_{\rho'\sigma'}[x^{\alpha'}(\mathcal{P})] = g_{\mu\nu}[x^\alpha(\mathcal{P})] \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\rho'}} \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\sigma'}}$$

une fois combiné avec la loi de transformation (??) et avec

$$g_{\mu\nu}[x^\alpha(\mathcal{P})] = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}[x^\alpha(\mathcal{P})]$$

révèle que [..]

Ainsi les fonctions de perturbation de la métrique dans les nouvelles et anciennes systèmes de coordonnées sont reliés par

$$h_{\mu\nu}^{\text{nouveau}} = h_{\mu\nu}^{\text{ancien}} - \xi_{\mu,\nu} - \xi_{\nu,\mu}$$

alors que les formes fonctionnelles de tous les autres scalaires, vecteurs et tenseurs sont inaltérés, à la précision de la théorie linéarisée

B transformations de jauge et invariance de jauge. [..]

$$R_{\mu\nu\alpha\beta}^{\text{nouveau}} = R_{\mu\nu\alpha\beta}^{\text{ancien}}$$

Une telle invariance de jauge était déjà garantie par le fait que $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ sont les composantes d'un tenseur, et sont ainsi essentiellement les mêmes si elles sont calculées dans un repère orthonormal $g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \eta_{\mu\nu}$, dans les vieilles coordonnées où $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{ancien}$, où dans les nouvelles coordonnées où $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}^{nouveau}$

Comme le tenseur de Riemann, le tenseur d'Einstein et le tenseur stress-énergie ne sont pas affectés par des transformations de jauge. De là, *Si on connaît une solution particulière $\bar{h}_{\mu\nu}$ des équations de champ linéarisées (??) pour un $T^{\mu\nu}$ donné, on peut obtenir une autre solution qui décrit précisément la même situation physique (toutes les observables restent inchangées) par le changement de jauge (??), dans lequel chaque ξ_μ sont 4 fonctions arbitraires mais petites*

C Jauge de Lorentz [..]

D systèmes de coordonnées curvilinéaires [..]

[..]

Ainsi, conclure que le plus général élément de ligne relativiste, précis à l'ordre linéarisé, est :

$$ds^2 = -(1 - 2M/r)dt^2 + (1 + 2M/r)(dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2)$$

[..]

18.2 ondes gravitationnelles

Les conditions de jauge et les équations de champ (18.8 18.9) de la théorie linéarisée ... aux équations de la théorie électromagnétique en jauge de Lorentz et espace-temps plat,

$$A^\alpha{}_{,\alpha} = 0 \quad (18.12)$$

$$-A^\mu{}_{,\alpha}{}^\alpha = 4\pi J^\mu \quad (18.13)$$

Elles diffèrent seulement dans l'index ajouté ($h^{\mu\nu}$ contre A^μ , $T^{\mu\nu}$ contre J^μ). [..]

Par exemple, les équations de champ 18.9 doivent avoir des solutions du type ondes gravitationnelles. L'analogie de l'onde plane électromagnétique

$$A^x = A^x(t-z), \quad A^y = A^y(t-z), \quad A^z = 0, \quad A^0 = 0$$

sera l'onde gravitationnelle plane

$$\bar{h}^{xx} = \bar{h}^{xx}(t-z), \quad \bar{h}^{xy} = \bar{h}^{xy}(t-z), \quad \bar{h}^{yy} = \bar{h}^{yy}(t-z), \quad \bar{h}^{\mu 0} = \bar{h}^{\mu z} = 0, \quad \text{pour tout } \mu \quad (18.14)$$

[..]

18.3 effet de la gravité sur la matière

Les effets des champs gravitationnels faibles sur la matière peut être calculé en utilisant la métrique linéarisée (18.1) et les symboles de Christoffel (18.2) dans les équations du déplacement approprié - c'est-à-dire dans l'équation géodésique (pour le déplacement des particules ou de rayons lumineux), dans les équations hydrodynamiques (pour un fluide), dans les équations de Maxwell (pour les ondes électromagnétiques), ou dans l'équation $\nabla \dot{T} = 0$ pour le tenseur stress-énergie total de quelques champs et matière qui peut être présent.

[...]

De la même façon que les équations électromagnétiques (18.12, 18.13) garantissent la conservation de la charge

$$J^\mu{}_{,\mu} = 0, \quad \int_{\text{tout l'espace}} J^0(t, x) dx dy dz \equiv Q = \text{const},$$

de la même façon les équations gravitationnelles (18.8 18.9) garantissent la conservation du 4-quantité de mouvement et du moment angulaire de n'importe quel corps entouré de vide :

$$T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0 \tag{18.15}$$

$$\int_{corps} T^{\mu 0}(t, x) dx dy dz \equiv P^\mu \equiv const \tag{18.16}$$

$$(x^\alpha T^{\beta\mu} - x^\beta T^{\alpha\mu})_{;\mu} = 0 \tag{18.17}$$

$$\int_{corps} (x^\alpha T^{\beta 0} - x^\beta T^{\alpha 0}) dx dy dz \equiv J^{\alpha\beta} = const \tag{18.18}$$

(voir ?? pour les propriétés basiques du moment angulaire en relativité spéciale. Le moment angulaire ici est calculé relativement à l'origine du système de coordonnées.) Maintenant il est important que les composantes du stress-energie $T^{\mu\nu}$, qui apparaît dans les équations de champ linéarisées (18.7) et dans ces lois de conservation, sont précisément les composantes que l'on calculerait en relativité restreinte (avec $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$). Le résultat est que la conservation de l'énergie-momentum formulée ici ne contient aucune contribution ou effet de la gravité! De cela on voit que la théorie linéarisée suppose que les forces gravitationnelles ne font aucun travail significatif. Par exemple, l'énergie perdue due aux forces d'amortissement ?? sont négligées dans la théorie linéarisée. De manière similaire, la conservation du 4-momentum P^μ pour chacun des corps agissant comme source de $h_{\mu\nu}$ signifie que chaque corps se déplace sur une géodésique de $\eta_{\mu\nu}$ (lignes droites dans le système approchant ?? de coordonnées de Lorentz) plutôt que sur une géodésique de $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$. Ainsi la théorie linéarisée peut être utilisées pour calculer le déplacement des particules tests et des champs, en utilisant $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$; mais pour inclure les corrections gravitationnelles au déplacement des sources elles-mêmes- pour leur permettre de satisfaire $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ plutôt que $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ - on doit réinsérer dans les équations de champ les termes non linéaires que la théorie linéarisées a rejetés. (voir par exemple, le chapitre 20 sur les lois de conservation; 36.9, 36.10, 36.11 sur la génération d'ondes gravitationnelles et ??; et 39 sur l'approximation post-newtonienne

18.4 champs gravitationnels à peu près newtonien

La métrique correspondante 18.10 est

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + (1 - 2\Phi)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \approx -(1 - 2M/r)dt^2 + (1 + 2M/r)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{18.19}$$

loin de la source

Les erreurs dans cette métrique sont : (1) corrections manquantes de l'ordre Φ^2 due aux non linéarités que la théorie linéarisée a oubliées; (2) les corrections manquantes due à ?? $\bar{h}_{0j} = 0$ (ils sont de l'ordre de $\bar{h}_{0j} \sim \Phi v$ où $v \sim |T_{0j}|/T_{00}$ est une vitesse typique dans la source); (3) les corrections manquantes due à ?? $\bar{h}_{jk} = 0$ [ils sont de l'ordre $\bar{h}_{jk} \sim \Phi(|T_{jk}|/T_{00})$]. Dans le système solaire toutes ces erreurs sont $\sim 10^{-12}$, tandis que $\Phi \sim 10^{-6}$.

Une correspondance passive avec la théorie newtonienne exige seulement que $g_{00} = -(1 + 2\Phi)$; ...

exercice 18.6 : déviation de la lumière par le soleil A une haute précision, le soleil est statique et sphérique, donc son élément de ligne externe est (18.19 avec $\Phi = -M/r$, càd

$$ds^2 = -(1 - 2M/r)dt^2 + (1 + 2M/r)(dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{18.20}$$

partout en dehors du soleil.

Un photon se déplaçant dans le plan équatorial ($z=0$) de cet espace-temps courbé est dévié très légèrement de sa ligne d'univers

$$x = t, y = b \equiv \text{"paramètre d'impact"}, z = 0 \tag{18.21}$$

Calcule la quantité de déviation de la façon suivante. (a) Ecris l'équation de la géodésique 16.1 pour la ligne d'univers du photon,

$$\frac{dp^\alpha}{d\lambda^*} + \Gamma^\alpha_{\beta\gamma} p^\beta p^\gamma = 0 \tag{18.22}$$

[ici $p = d/d\lambda^* = (4\text{-quantité de mouvement du photon}) = (\text{vecteur tangent à la géodésique nulle du photon}).$

(b) en évaluant les coefficients de connection dans le plan équatorial, et en utilisant les valeurs approximées, $|p^\nu| \ll p^0 \approx p^x$ des composantes du 4-quantité de mouvement correspondant à la ligne d'univers approximée 18.21, montre que

$$\frac{dp^\nu}{d\lambda^*} = \frac{-2Mb}{(x^2 + b^2)^{3/2}} p^x \frac{dx}{d\lambda^*}, p^x = p^0 \left[1 + O\left(\frac{M}{b}\right) \right] = \text{const} \left[1 + O\left(\frac{M}{b}\right) \right]$$

(c) intègre cette équation pour p^ν , en supposant que $p^\nu = 0$ à $x = -\infty$ (le photon se déplace précisément dans sa direction x initiale); ainsi ??

$$p^\nu(x = +\infty) = -\frac{4M}{b} p^x$$

(d) montre que cela correspond à la déviation de la lumière d'un angle

$$\Delta\Phi = 4M/b = 1''.75(R_\odot/b) \tag{18.23}$$

Chapitre 19

Masse et moment angulaire d'un système gravitationnel

19.1 champ externe d'une source faible gravitante

19.2 mesure de la masse et du moment angulaire

19.3 masse et moment angulaire de sources entièrement relativistes

19.4 masse et moment angulaire d'un univers fermé

Chapitre 20

Lois de conservation du 4-momentum et du moment angulaire

20.1 ●

20.2 ●

20.3 ●

20.4 ●

20.5 ●

20.6 20.6

Chapitre 21

PRINCIPE DE VARIATION ET ...

21.1 La dynamique nécessite initial-value data

Aucun plan ?? pour prévoir la dynamique de la géométrie ne pourrait être en même temps plus faux et plus vrai que ceci : "Etant donnée la distribution de la masse-énergie ; alors résoud l'équation d'Einstein du second ordre,

$$\mathbf{G} = 8\pi\mathbf{T} \quad (21.1)$$

pour la géométrie." Donne la distribution de la masse-énergie dans l'espace-temps puis résoud pour trouver la géométrie d'espace-temps? Non. Etant donné les champs qui génère la masse énergie, et le taux temporel de changement??, et étant donnée la 3-géométrie de l'espace et son taux temporel de changement, tous en même temps, et résoud la 4-géométrie à ce moment? Oui. Et seulement ensuite [...] Afin de déterminer quelles sont les valeurs initiales à donner, on ne trouve de guide plus utile que le principe de variation de Hilbert,

$$I = \int \mathfrak{L}d^4x = \int L(-g)^{1/2}d^4x = \int Ld(4 - \text{volumepropre}) = \text{extremum} \quad (21.2)$$

ou la variante Arnowitt-Deser-Misner ("ADM") (§21.6) et les généralisations?? [...] La fonction de Lagrange L (fonction scalaire) de la densité Lagrangienne $\mathfrak{L} = (-g)^{1/2}L$ (quantité à être intégrée sur un volume de coordonnées??) est construite sur la seule géométrie, quand on s'occupe de l'espace courbé vide, mais les champs sont habituellement présents aussi, et contribuent aussi au Lagrangien ; ainsi,

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}_{\text{geom}} + \mathfrak{L}_{\text{champ}} = (-g)^{1/2}L; L = L_{\text{geom}} + L_{\text{champ}} \quad (21.3)$$

[...] Dans l'exemple le plus élémentaire, exemple de l'application d'un principe d'action en mécanique, où on écrit

$$I = \int_{x',t'}^{x,t} L(dx/dt, x, t)dt \quad (21.4)$$

et on extrême l'intégrale, on sait déjà que la résultante "longueur dynamique du chemin" ou "phase dynamique", ou "action",

$$S(x, t) = I_{\text{extremum}} \quad (21.5)$$

est une quantité importante, non seulement parce que elle donne (à un facteur \hbar) la phase de la fonction d'onde de la mécanique quantique. De plus, la taux de changement de cette fonction d'action avec la position est ce qu'on appelle moment,

$$p = \partial S(x, t)/\partial x; \quad (21.6)$$

et (l'opposé du) le taux de variation avec le temps donne l'énergie (Figure 21.1),

$$E = -\partial S(x, t)/\partial t; \quad (21.7)$$

et la relation entre ces deux??

$$E = H(p, x) \quad (21.8)$$

appelée "relation de dispersion" ou appelée comme on veut, est le sujet central de la mécanique. En travaillant avec la dynamique de la géométrie dans la formulation Arnowitt-Deser-Misner,¹ on trouve commode de penser aux quantités spécifiées

1. *Remarque historique.* Personne ne sait [...] Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Integer sed placerat arcu. Donec auctor dolor eget leo scelerisque mollis. Nullam vitae augue lectus, ac cursus lacus. Duis non pretium tellus. Quisque sit amet ornare libero. Suspendisse ante nulla, mattis lobortis ultrices quis, rutrum ut libero. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Quisque et semper sem. Vivamus quis augue id erat ultrices gravida a in est. Duis quam velit, vehicula eu tincidunt a, consectetur tincidunt felis. Sed sit amet consectetur magna. Donec turpis leo, feugiat id semper ac, molestie id eros. Nullam ut turpis nisl. Mauris et sapien nunc.

Suspendisse potenti. Morbi tempus tempus facilisis. Nulla in sem tempus justo viverra rhoncus. Etiam turpis dolor, bibendum sit amet rhoncus ac, mattis eu arcu. Aliquam erat volutpat. Lorem ipsum dolor sit amet, consectetur adipiscing elit. Mauris suscipit bibendum quam, in pellentesque nisl tincidunt vitae. Nam consequat pulvinar nisi, ac dignissim tortor lobortis non. Pellentesque placerat congue pulvinar. Curabitur sagittis sem ipsum, eget ornare neque. Nam lobortis, nisi sed rutrum consectetur, tortor sapien scelerisque sapien, in vulputate sem diam sed odio. Phasellus adipiscing posuere arcu at sollicitudin. Nulla facilisi. Integer ornare eleifend orci, sed adipiscing velit faucibus quis. Vestibulum eros justo, accumsan at ultricies et, euismod a arcu. Maecenas commodo, massa at hendrerit mollis, nisl felis congue dolor, eu ornare tellus neque eu risus. Aenean tincidunt, ligula quis porta lacinia, mi leo consectetur nibh, eget ultrices nulla orci sed lorem. Vestibulum quis ipsum tortor, vitae accumsan nisl. Nunc dolor risus, dapibus et aliquam eget, scelerisque at ligula. Aliquam eget sapien at risus tincidunt feugiat in quis tellus. Suspendisse eget lacus ut purus faucibus lobortis. Pellentesque eleifend, tellus sed ultrices hendrerit, lorem neque tincidunt sapien, quis viverra felis purus quis justo. Etiam rhoncus enim pellentesque lacus porta dapibus. Vestibulum velit mauris, pellentesque at porta non, feugiat eget nisi. Mauris commodo egestas rutrum. In enim justo, adipiscing quis luctus eget, scelerisque non orci. Nam scelerisque, quam ac dapibus vestibulum, lacus turpis sagittis libero, ac congue elit tortor nec nulla. Praesent pulvinar vulputate ipsum at convallis. Cras rutrum venenatis interdum. Class aptent taciti sociosqu ad litora torquent per conubia nostra, per inceptos himenaeos. Aliquam ut magna odio. Maecenas ac dolor ac orci placerat malesuada non a massa. Sed venenatis velit non est rhoncus interdum. Phasellus luctus imperdiet eros ut gravida. Cras enim tortor, fringilla at laoreet commodo, ultricies ut tortor. Sed id nunc sed mi lacinia dictum. Integer facilisis libero sit amet justo cursus eu venenatis leo condimentum. Phasellus posuere, orci et fringilla tristique, ipsum lectus feugiat sem, nec pretium massa odio ullamcorper erat. Quisque bibendum semper metus at consectetur. Integer gravida, eros nec vehicula imperdiet, purus dui placerat velit, at lacinia neque metus auctor lacus. Maecenas mattis laoreet scelerisque. Vestibulum urna turpis, tristique vel commodo nec,

Figure 21.1 La quantité de mouvement et (l'opposé de) l'énergie vus comme le taux de variation de "la phase dynamique" ou "action",

$$S(x, t) = I_{extremum}(x, t) \left(\frac{extremum}{valueof} \right) \int_{x', t'}^{x, t} L(x, \dot{x}, t) dt \quad (1)$$

... ainsi,

$$\delta S = p\delta x - E\delta t \quad (2)$$

La variation de l'intégrale I en fonction des variations de l'histoire le long du chemin, $\delta x(t)$, est déjà zéro en raison de l'optimisation historique ???; alors la seule variation qui prend place est

$$\delta S = \delta I_{extremum} = L(x, \dot{x}, t)\delta t + \int_{x', t'}^{x, t} \delta L dt = L\delta t + \int_{x', t'}^{x+\Delta x, t} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \delta \dot{x} + \frac{\partial L}{\partial x} \delta x \right) dt = L\delta t + \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \Delta \dot{x} + \int_{x', t'}^{x+\Delta x, t} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \delta x \right) \quad (3)$$

Quand on contemple seulement un changement dans les coordonnées (x, t) du point final (changement de l'histoire de $\mathfrak{D}\mathfrak{P}$ à $\mathfrak{D}\mathfrak{L}$ on a $\Delta x = \delta x$. Quand on fait seulement un changement δt au point final (changement de l'histoire de $\mathfrak{D}\mathfrak{P}$ à $\mathfrak{D}\mathfrak{S}$), on a $\Delta x = -\dot{x}\delta t$ (indicateur de changement de \mathfrak{P} à \mathfrak{A}) = $-\dot{x}\delta t$. Pour la variation générale du point final, on a ainsi $\Delta x = \delta x - \dot{x}\delta t$ et

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \Delta \dot{x} - \left(\dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L \right) \delta t. \quad (4)$$

On conclue que la "relation de dispersion" est obtenue en prenaant les relations [comparez (2) et (4)

$$(tauxdechangementdelaphasedynamiqueaveclaposition) = (quantitédemouvement) = p = \frac{\partial L(x, \dot{x}, t)}{\partial \dot{x}} \quad (5) \text{ et}$$

$$-(tauxdechangementdelaphasedynamiqueavecletemps) = (énergie) = E = \dot{x} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - L \quad (6)$$

et en éliminant \dot{x} [résoud (5) pour \dot{x} et substitue cette valeur de \dot{x} dans (6)]; ainsi

$$E = H(p, x, t) \quad (7) \text{ ou } -\frac{\partial S}{\partial t} = H\left(\frac{\partial S}{\partial x}, x, t\right) \quad (8) \text{ [...]}$$

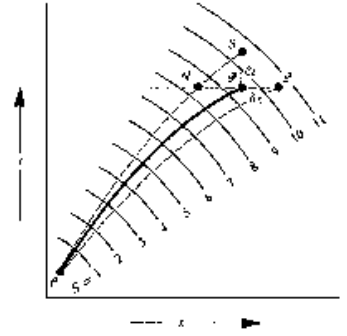


FIGURE 21.1 – figure 21.1

comme étant la 3-géométrie $(^3)\mathfrak{G}$ de l'hypersurface initiale de type espace et la 3-géométrie $(^3)\mathfrak{G}$ de l'hypersurface finale de type espace. On envisage l'intégrale d'action comme extrémisée en fonction du choix de l'espace-temps qui remplit le "sandwich" entre ces deux faces. Si on a ainsi déterminé l'espace-temps, on a automatiquement, par cet acte, déterminé la séparation en temps propre des deux hypersurfaces. Il n'y a pas de variable de temps additionnelle à apporter ou à considérer. ?? Le seul concept $(^3)\mathfrak{G}$ prend ainsi la place en géométrie des deux quantités x, t de la dynamique des particules. L'action S qui ici dépend de x et t dépend ici de la 3-géométrie de la face du sandwich ; ainsi

$$S = S(^3\mathfrak{G}) \quad (21.9)$$

Un changement dans la 3-géométrie change l'action. La quantité de changement dans l'action par changement élémentaire dans la 3-géométrie définit la "quantité de mouvement du champ" π_{true}^{ij} conjuguée à la coordonnée de champ géométrodynamique g_{ij} , selon la formule

$$\delta S = \int \pi_{true}^{ij} \delta g_{ij} d^3x \quad (21.10)$$

En comparant cette équation à la formulation canonique de la géométrie dynamique de Arnowitt, Deser et Misner (ADM) avec l'expression du changement de l'action avec la variation du point final en mécanique élémentaire,

$$\delta S = p \delta x - E \delta t \quad (21.11)$$

, [...] Ainsi la "relation de dispersion" qui connecte les taux de variation de l'action en fonction de plusieurs variations que l'on fait dans les "coordonnées de champ" de la 3-géométrie prend la forme

$$\mathfrak{H}(\pi^{ij}, g_{mn}) = 0 \quad (21.12)$$

avec le E-terme de (21.8) égale à zéro (détails en §21.7). [...] La différence entre un hamiltonien et un super-Hamiltonien [voir par exemple, Kramers (1957)] n'est montrée nulle part plus clairement que dans le problème d'une particule chargée se déplaçant dans un espace-temps plat sous l'influence du champ dérivé du 4-potential électromagnétique $A_\mu(x^\alpha)$. Le traitement Hamiltonien dérive l'équation du mouvement du principe d'action, $0 = \delta I = \delta \int \left[p_i \frac{dx^i}{dt} - H(p_j, x^k, t) \right] dt$ avec

$$H = -\frac{e}{c} \Phi + \left[m^2 + \eta^{ij} \left(p_i + \frac{e}{c} A_i \right) \left(p_j + \frac{e}{c} A_j \right) \right]^{1/2}$$

L'analyse super-hamiltonienne obtient les équations de déplacement du principe d'action

$$0 = \delta I' = \delta \int \left[p_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} - \mathfrak{H}(p_\alpha, x^\beta) \right] d\lambda$$

Ici le super-hamiltonien est donné par l'expression

$$\mathfrak{H}(p_\alpha, x^\beta) = \frac{1}{2} \left[m^2 + \eta^{\mu\nu} \left(p_\mu + \frac{e}{c} A_\mu \right) \left(p_\nu + \frac{e}{c} A_\nu \right) \right]$$

. Le principe variationnel donne les équations d'Hamilton pour le taux de variation $dx^\alpha/d\lambda = \partial \mathfrak{H} / \partial p_\alpha$ $dp_\beta/d\lambda = -\partial \mathfrak{H} / \partial x^\beta$ [...]

21.2 LE PRINCIPE D'ACTION DE HILBERT ET LA METHODE DE VARIATION DE PALATINI

[...]

$$L_{geom} = (1/16\pi)^{(4)}R. \quad (21.13)$$

(Remplacez $1/16\pi$ par $c^3/16\pi G$ [...] ou divisez par $\hbar \approx L^{*2}$ pour convertir de la phase dynamique, avec les unités de l'action, à la phase actuelle de la fonction d'onde, avec les unités en radian) Ici $(4)R$ est la courbure scalaire invariante en quatre dimension, [...] Ce principe d'action ne contient que les dérivées secondes des coefficients de la métrique.[...] ainsi, pour être invariant, L_{geom} doit être une valeur indépendante du choix d'un système de coordonnées.[...] $(4)R$ est le seul de ces 14 quantités qui est linéaire pour les dérivées secondes des coefficients de la métrique. [...] Alors $x(t)$ et $p(t)$ de viennent deux fonctions indépendantes ajustables dans un nouveau principe de variation

$$I = \int_{x',t'}^{x,t} \left[p(t) \frac{dx(t)}{dt} - H(p(t), x(t), t) \right] dt = extremum \quad (21.14)$$

[...] Pour exprimer le principe de variation de Hilbert en termes de $\Gamma_{\mu\nu}^\lambda$ et $g^{\alpha\beta}$ considérées comme les fonctions primordiales de t, x, y, z notons que la densité Lagrangienne est

$$L_{geom}(-g)^{1/2} = (1/16\pi)^{(4)}R(-g)^{1/2} = (1/16\pi)g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}(-g)^{1/2} \quad (21.15)$$

. [...]

$$R_{\alpha\beta} = R_{\alpha\lambda\beta}^\lambda \quad (21.16)$$

où

$$R_{\alpha\mu\beta}^\lambda = \partial\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda/\partial x^\mu - \partial\Gamma_{\alpha\mu}^\lambda/\partial x^\beta + \Gamma_{\sigma\mu}^\lambda\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma - \Gamma_{\sigma\beta}^\lambda\Gamma_{\alpha\mu}^\sigma \quad (21.17)$$

$$0 = \delta I = (1/16\pi) \int \delta[g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}(-g)^{1/2}]d^4x + \int \delta[L_{field}(-g)^{1/2}]d^4x \quad (21.18)$$

[...]

$$\Gamma_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}^{\bar{\gamma}} = \left[\Gamma_{\sigma\tau}^\lambda \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\bar{\alpha}}} \frac{\partial x^\tau}{\partial x^{\bar{\beta}}} + \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial x^{\bar{\alpha}} \partial x^{\bar{\beta}}} \right] \frac{\partial x^{\bar{\gamma}}}{\partial x^\lambda} \quad (21.19)$$

[...]

Taux de variation de l'action en fonction de la coordonnée dynamique(="quantité de mouvement") et avec le temps, et la relation de dispersion (= "hamiltonien") qui se connectent en mécanique des particules et en électrodynamique ??

prologue[...]

En mécanique des particules on considère que l'histoire $x=x(t)$ est ajustable entre les points (x',t') et (x,t) et on les fait varier pour extrémiser l'intégrale $I = \int L(x, \dot{x}, t) dt$ prise entre ces deux limites. Exprimé en termes de coordonnées et momenta (voir Figure 21.1), l'intégrale a la forme

$$I = \int [p\dot{x} - H(p, x, t)] dt(1)$$

où $x(t)$ est toujours la fonction à faire varier et p est seulement uen abbréviation pour une certaine fonction de x et \dot{x} ; ainsi, $p = \partial L(x, \dot{x}, t) / \partial \dot{x}$. Vue de cette façon, la variation $\delta p(t)$ du momentum est gFouernée par, et est seulement un reflet de, la variation $\delta x(t)$.

1. Le momentum traité comme une variable indépendante Il existe miraculeusement, cependant, une autre voie pour voir le problème (voir écart). On peut regarder $x(t)$ et $p(t)$ comme deux fonctions tout à fait décorrélées et ajustables indépendamment. On abandonne la formule $p = \partial L(x, \dot{x}, t) / \partial \dot{x}$, seulement pour la retrouver, ou son équivalent, de la nouvelle version "indépendance des coordonnées et du momentum" du principe de variation. La variation de (1), comme définit et calculée de cette façon, devient ^a

$$\delta I = p \delta x|_{x',t'}^{x'',t''} + \int_{x',t'}^{x'',t''} \left[\left(\dot{x} - \frac{\partial H}{\partial p} \right) \delta p + \left(-\dot{p} - \frac{\partial H}{\partial x} \right) \delta x \right] dt(2)$$

Exigeons que le coefficient de δp s'évanouisse et on a la nouvelle version cherchée,

$$\dot{x} = \frac{\partial H(p, x, t)}{\partial p}$$

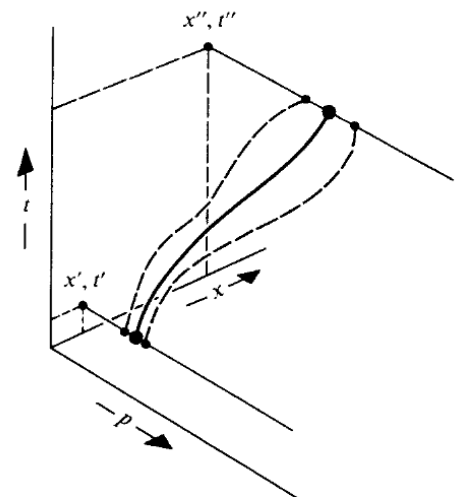


FIGURE 21.2 – figure 21.1

a. $p\dot{x} = \dot{p}x - x\dot{p}??$

Boîte 21.1 (suite)

de la vieille relation, $p = \partial L(x, \dot{x}, t) / \partial \dot{x}$, entre le momentum et la vitesse. La disparition du coefficient de δx donne l'équation de Hamilton,

$$\dot{p} = -\frac{\partial H(p, x, t)}{\partial x}, (3)$$

équivalent dans son contenu à l'équation de déplacement de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0. (4)$$

[...]

2. L'action comme un outil pour trouver la relation de dispersion

Note $S(x, t)$ "l'action", ou extrémale valeur de I , pour l'histoire classique qui commence avec (x', t') et finit avec (x, t) ($=\hbar$ fois la phase de l'onde de de Broglie). Changer les points finaux en $(x + \delta x, t)$ fait le changement dans l'action

$$\delta S = p\delta x. (5)$$

Ainsi le momentum est "le taux de changement de l'action avec la coordonnée dynamique." Changer le point final en

$$(x + \delta x, t + \delta t) = ([x + \dot{x}\delta t] + [\delta x - \dot{x}\delta t], t + \delta t) (6)$$

fait le changement dans l'action

$$\delta S = p[\delta x - \dot{x}\delta t] + L\delta t = p\delta x - H\delta t. (7)$$

Ainsi l'hamiltonien est l'opposé du "taux de changement de l'action avec le temps". En terme d'hamiltonien $H = H(p, x)$, "la relation de dispersion" de l'onde de Broglie devient

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = H\left(\frac{\partial S}{\partial x}, x\right)$$

Dans la dérivation ?? de cette relation de dispersion, on peut ?? $p(t)$ et $x(t)$ comme des quantités variant indépendamment, et dériver le résultat en à peine

Boîte 21.1 (suite)

plus d'un pas à partir de la définition $I = \int L(x, \dot{x}, t) dt$. De manière similaire en électrodynamique. ; B analogue de la méthode Palatini en électrodynamique.

21.3 3 aspects de la géométrie : en images, abstraite, en terme de composantes

21.4 Algèbre tensorielle en espace-temps courbé

21.5 Transport parallèle, dérivée covariante, coefficients de connexion, géodésiques

21.6 Repère de Lorentz local : discussion mathématique

21.7 Déviation géodésique et le tenseur de courbure de riemann

Chapitre 22

Thermodynamique, hydrodynamique, électrodynamique, optique géométrique et théorie cinétique

- 22.1 le pourquoi de ce chapitre
- 22.2 thermodynamique en espace-temps courbé
- 22.3 hydrodynamique en espace-temps courbé
- 22.4 électrodynamique en espace-temps courbé
- 22.5 optique géométrique en espace-temps courbé
- 22.6 théorie cinétique en espace-temps courbé

Cinquième partie

ETOILES RELATIVISTES

Chapitre 23

Etoiles sphériques

(23.1)

(23.2)

(23.3)

(23.4)

(23.5)

(23.6)

(23.7)

(23.8)

23.1 prologue

23.2 coordonnées et métrique pour un système sphérique statique

23.3 interprétation physique des coordonnées de Schwarzschild

En relativité générale, parce que l'utilisation de coordonnées arbitraires est permise, la signification physique de l'expression à propos des composantes de tenseur et vecteur et autres quantités n'est pas évident. Il y a cependant quelques situations où l'interprétation est presque aussi directe qu'en relativité restreinte. L'exemple le plus évident est le point central d'un système inertiel local de coordonnées, où le principe d'équivalence nous permet de traiter toutes les quantités locales (quantités non impliquées dans le courbure d'espace-temps) exactement comme en relativité restreinte. Les coordonnées de Schwarzschild pour un système sphérique produit?? un second exemple.

Notre première réaction en rencontrant une nouvelle métrique devrait être de l'examiner, pas dans le but d'apprendre sur le champ gravitationnel, pour lequel le tenseur de courbure est plus directement informatif, mais pour apprendre sur les coordonnées (Sont-elles, par exemple, localement inertiel sur un point ?)

Les noms donnés aux coordonnées sont pas de signification intrinsèque. Une transformation de coordonnées $t' = \theta, r' = \phi, \theta' = r, \phi' = t$ est parfaitement permise, et n'a pas d'influence sur la physique ou les mathématiques d'un problème relativiste. La seule chose qu'il affecte est une communication facile entre l'investigateur qui l'adopte et ses collègues. Ainsi les noms $tr\theta\phi$ pour les coordonnées de Schwarzschild (23.7) donne un [...] En particulier, les noms θ, ϕ sont justifiés par le fait que sur chaque surface à deux dimensions de r et t constants, la distance entre deux événements proches est donnée par $ds^2 = r^2 d\Omega^2$, comme il convient aux coordonnées standards θ, ϕ sur une sphère de rayon r . La surface de la sphère à deux dimensions est clairement

$$A = \int (rd\theta)(r\sin\theta d\phi) = 4\pi r^2 \quad (23.9)$$

de là, la métrique (??) dit comment mesurer la coordonnée r qu'il utilise. On peut simplement mesurer (en unités de temps propre) l'aire A de la sphère, composée de tous les points équivalent rotationnellement au point \mathcal{P} pour laquelle la valeur $r(\mathcal{P})$ est désirée; et on peut alors calculer

$$r(\mathcal{P}) = \left(\begin{array}{l} \text{aire de la sphère} \\ \text{à travers le point } \mathcal{P} / 4\pi \end{array} \right)$$

[...] Cela rend plus difficile de concevoir une machine pour mesurer t que pour mesurer r, θ, ϕ . [...] La discussion de dessus identifie les coordonnées de Schwarzschild de l'équation (??) par leurs propriétés géométriques intrinsèques. Non seulement r et t sont des variables radiales et de temps, respectivement ($\partial/\partial r$ et $\partial/\partial t$ sont de types espace et temps, respectivement, et sont orthogonaux aux sphères définies par une symétrie rotationnelle), mais ils ont des propriétés particulières [$4\pi r^2 = \text{aire de la surface}$, $\partial g_{\mu\nu} / \partial t = 0$; $\partial/\partial r \cdot \partial/\partial t = g_{rt} = 0$; $\partial/\partial t \cdot \partial/\partial t = g_{tt} = -1$ à $r = \infty$] qui les distingue des autres choix possibles de coordonnées [$r' = f(r)$; $t' = t + F(r)$]. [...] Elle procurent un choix qui est raisonnable, non ambiguë, utile et souvent utilisé.

23.4 description de la matière à l'intérieur d'une étoile

A une très grande précision, la matière à l'intérieur de n'importe quelle étoile est un fluide parfait. [...] sont négligeables, et le transport d'énergie est négligeable sur une "échelle de temps hydrodynamique". Ainsi, il est raisonnable ?? de décrire la matière par les paramètres d'un fluide parfait :[..]

23.5 équations de structure

(23.10)

(23.11)

(23.12)

(23.13)

(23.14)

(23.15)

(23.16)

(23.17)

(23.18)

(23.19)

(23.20)

(23.21)

(23.22)

(23.23)

(23.24)

23.6 champ gravitationnel externe

23.6.1 aa

Au dehors d'une étoile la densité et la pression s'évanouissent, donc seulement les paramètres métriques Φ et $\Gamma = -\frac{1}{2}\ln(1 - 2m/r)$ ont besoin d'être considérés. De l'équation (23.19) on voit que "la masse à l'intérieur du rayon r ," $m(r)$ reste constante pour des valeurs de r plus grande que R (en dehors de l'étoile). Sa valeur constante est notée par M :

$$m(r) = M \text{ pour } r > R \text{ (càd au dehors de l'étoile)} \quad (23.25)$$

En intégrant l'équation 23.21 avec $p = 0$ et $m = M$, et en imposant la condition aux limites 23.10 sur Φ à $r = \text{inf}$ ("normalisation de l'échelle de temps à $r = \text{inf}$ "), on trouve

$$\Phi(r) = \frac{1}{2}\ln(1 - 2M/r) \text{ pour } r > R \quad (23.26)$$

En conséquence, à l'extérieur de l'étoile la géométrie d'espace-temps 23.7 devient

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - 2M/r\right)} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (23.27)$$

(23.28)

(23.29)

(23.30)

(23.31)

(23.32)

(23.33)

(23.34)

(23.35)

(23.36)

(23.37)

(23.38)

Chapitre 24

Pulsars et étoiles à neutrons ; quasars et étoiles supermassives

24.1 vue d'ensemble

24.2 le point final de l'évolution stellaire

24.3 pulsars

24.4 étoiles supermassives et instabilités stellaires

24.5 quasars et explosions dans un noyau galactique

24.6 groupes d'étoiles relativistes

Chapitre 25

Le "pic dans le potentiel" comme ?? du déplacement en géométrie de Schwarzschild

(25.1)

(25.2)

(25.3)

(25.4)

(25.5)

(25.6)

(25.7)

(25.8)

(25.9)

(25.10)

(25.11)

(25.12)

(25.13)

(25.14)

(25.15)

25.1 Des lois de Kepler au potentiel effectif pour le déplacement dans la géométrie de Schwarzschild

$$M = \omega^2 a^3$$

25.2 symétries et lois de conservation**25.3 quantités conservées pour le déplacement en géométrie de Schwarzschild****25.4 déplacement vers le rouge gravitationnel****25.5 orbites des particules**

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + \tilde{V}^2(r) = \tilde{E}^2 \quad (25.16)$$

où \tilde{V} est "le potentiel effectif" défini par

$$\tilde{V}^2(r) = (1 - 2M/r)(1 + \tilde{L}^2/r^2)$$

25.6 orbite d'un photon, neutrino, ou graviton en géométrie de Schwarzschild**25.7 groupe d'étoiles sphériques**

Chapitre 26

Pulsations stellaires

26.1 MOTIVATION

26.2 préparer le problème

Le système à analyser est une sphère de fluide parfait, pulsant radialement avec une très petite amplitude. Pour analyser les pulsations on a besoin (a) des équations exactes qui gouvernent la configuration d'équilibre autour desquelles ?? la sphère pulse; (b) d'un système de coordonnées pour la sphère vibrante qui se réduit, pour une amplitude de pulsation nulle, aux coordonnées standard de Schwarzschild de la sphère d'équilibre; (c) un ensemble de petites fonctions décrivant la pulsation (déplacement radial et vitesse, pression et perturbations de densité, variations au premier ordre des coefficients métriques), ??; et (d) un ensemble d'équations gouvernant l'évolution de ces "fonctions perturbatives".

26.2.1 configuration d'équilibre

Les équations de structure pour l'équilibre de la sphère sont celles résumées au §23.7. Cela sera utile de les réécrire ici, avec quelques changements de notation (utilisation de l'indice "0" pour noter la "configuration non perturbée"; utilisation de $\Lambda = -\frac{1}{2}\ln(1 + 2m/r)$ à la place de m dans toutes les équations; utilisation d'un prime pour noter les dérivées en fonction de r) :

$$ds^2 = -e^{2\Phi_0} dt^2 + e^{2\Lambda_0} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (26.1)$$

$$\Lambda'_0 = \frac{1}{2r}(1 - e^{2\Lambda_0}) + 4\pi r \rho_0 e^{2\Lambda_0} \quad (26.2)$$

$$p'_0 = -(\rho_0 + p_0)\Phi'_0 \quad (26.3)$$

$$\Phi'_0 = -\frac{1}{2r}(1 - e^{2\Lambda_0}) + 4\pi r p_0 e^{2\Lambda_0} \quad (26.4)$$

26.2.2 coordonnées pour une configuration perturbée

La sphère de gaz pulse d'une façon radiale, c-à-d, de symétrie sphérique. En conséquence, sa géométrie d'espace-temps doit être sphérique. Dans la boîte 23.3 il est montré que pour n'importe quel espace-temps sphérique, qu'elle soit dynamique ou statique, on peut introduire les coordonnées de Schwarzschild avec un élément de ligne

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + e^{2\Lambda} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (26.5)$$

$\Phi = \Phi(t, r)$, $\Lambda = \Lambda(t, r)$. On utilise ces coordonnées pour la sphère pulsante parce qu'elles se réduisent aux coordonnées non perturbées quand les pulsations ont une amplitude nulle.

26.2.3 les fonctions de perturbation

Quand les pulsations ont des amplitudes très petites, les coefficients de métrique, Φ et Λ , et les variables thermodynamiques p , ρ , et n mesurés dans le repère du fluide au repos, sont très proches de leurs valeurs non perturbées. Notons par $\delta\Phi$, $\delta\Lambda$, δp , $\delta\rho$, et δn les perturbations ??

$$\Phi(t, r) = \Phi_0(r) + \delta\Phi(t, r) \quad (26.6)$$

$$\Lambda(t, r) = \Lambda_0(r) + \delta\Lambda(t, r) \quad (26.7)$$

$$p(t, r) = p_0(r) + \delta p(t, r) \quad (26.8)$$

$$\rho(t, r) = \rho_0(r) + \delta\rho(t, r) \quad (26.9)$$

$$n(t, r) = n_0(r) + \delta n(t, r) \quad (26.10)$$

En plus de $\delta\Phi$, $\delta\Lambda$, δp , $\delta\rho$, et δn , une fonction supplémentaire de perturbation est nécessaire pour décrire les pulsations : le déplacement radial ξ du fluide par rapport à sa position d'équilibre :

Un élément de fluide placé à la coordonnée radiale r
dans la configuration non perturbée est déplacé à la
coordonnée radiale $r + \xi(r, t)$ à la coordonnée de
temps t dans la vibration de configuration ??.

Pour faire l'analyse des pulsations ??, toutes les équations seront linéarisées pour mes fonctions de perturbations $\delta\Phi$, $\delta\Lambda$, δp , $\delta\rho$, et δn .

26.2.4 Equations d'évolution

L'évolution des fonctions de perturbation en fonction du temps sera gouvernée par les équations du champ d'Einstein, la loi locale de conservation de l'énergie-quantité de mouvement $\nabla \bullet T = 0$, et les lois de la thermodynamique - toutes linéarisées de manière appropriées. L'analyse à partir de là n'est rien d'autre que la réduction de ces équations en une 'forme utilisable'. Bien sur, la réduction sera effectuée plus efficacement si on sait par avance quelle forme on recherche. Le but dans ce calcul et dans de nombreux calculs similaires est simple : (1) obtenir un set d'*équations dynamiques* pour les vrais ?? degrés de liberté dynamiques (seulement le déplacement du fluide ξ dans ce cas ; le déplacement du fluide et les amplitudes des ondes gravitationnelles dans un cas non sphérique, où les ondes sont possible) ; et (2) obtenir un set d'*équations aux valeurs initiales* exprimant les fonctions de perturbation ?? ($\delta\Phi$, $\delta\Lambda$, δp , $\delta\rho$, et δn dans ce cas) en terme de du degré de liberté dynamique (ξ).

26.3 PERTURBATIONS EULERIENNES CONTRE PERTURBATIONS LAGRANGIENNES

Avant de dériver

26.4 EQUATIONS AUX VALEURS INITIALES

26.5 EQUATION DE LA DYNAMIQUE ET CONDITIONS AUX BORNE

26.6 RESUME DES RESULTATS

Si un déplacement initial du fluide, $\xi(t = 0, r)$, [..], alors son évolution subséquente $\xi(t, r)$ peut être calculée en intégrant l'équation de la dynamique(26.19) ; et la forme de la pression, de la densité, et les perturbations métriques peuvent être calculées à partir de $\xi(t, r)$ en utilisant les équations aux valeurs initiales (26.9), (26.11), (26.15) et (26.16).

Plusieurs conséquences importantes de ces résultats sont explorés dans les boîtes 26.1 et 26.2.

Sixième partie

L'UNIVERS

Chapitre 27

Cosmologies idéalisées

- 27.1 l'homogénéité et l'isotropie de l'univers
- 27.2 contenu stress-énergie de l'univers - l'idéalisation du fluide
- 27.3 implications géométriques de l'homogénéité et l'isotropie
- 27.4 comoving. système de coordonnées synchrone pour l'univers
- 27.5 le facteur d'expansion
- 27.6 3-géométrie possible pour une hypersurface d'homogénéité
- 27.7 équations du déplacement pour le fluide
- 27.8 les équations de champ d'Einstein
- 27.9 paramètres de temps et constante de Hubble
- 27.10 la cosmologie élémentaire de Friedmann d'un univers fermé
- 27.11 modèles d'univers homogènes et isotropiques qui viole la conception d'Einstein de la cosmologie

Chapitre 28

Evolution de l'univers jusqu'à son état présent

28.1 le modèle standard de l'univers

28.2 le modèle standard modifié pour le chaos primordial

28.3 Qu'est-ce qui a précédé la singularité initiale

28.4 autres théories cosmologiques

Chapitre 29

Etat présent et évolution de l'univers

- 29.1 paramètres qui déterminent le destin de l'univers
- 29.2 décalage vers le rouge cosmologique
- 29.3 la relation distance-décalage vers le rouge : mesure de la constante de Hubble
- 29.4 la relation magnitude-décalage vers le rouge : mesure du paramètre de décélération
- 29.5 recherche de "l'effet lentille" de l'univers
- 29.6 densité de l'univers aujourd'hui
- 29.7 résumé de la connaissance actuelle à propos des paramètres cosmologiques

Chapitre 30

Cosmologies anisotropiques et inhomogènes

- 30.1 pourquoi l'univers est-il si homogène et isotropique ?
- 30.2 Le modèle Kasner pour un univers anisotropique
- 30.3 refroidissement adiabatique de l'anisotropie
- 30.4 dissipation visqueuse de l'anisotropie
- 30.5 création de particule dans l'univers anisotropique
- 30.6 cosmologies inhomogènes
- 30.7 l'univers mixmaster
- 30.8 les horizons et l'isotropie de l'arrière plan microonde

Septième partie

**EFFONDREMENT
GRAVITATIONNEL ET TROUS
NOIRS**

Chapitre 31

Géométrie de Schwarzschild

31.1 inévitabilité de l'effondrement des étoiles massives

31.2 la non singularité du rayon gravitationnel

La géométrie d'espace-temps de Schwarzschild

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}dr^2 + r^2d\Theta^2 + r^2\sin^2\Theta d\Phi^2 \quad (31.1)$$

semble mal se comporter près de $r = 2M$; g_{tt} y devient égal à zéro, et g_{rr} devient infini. Pourtant, on ne peut être sûr sans étude soignée si cette pathologie dans l'élément de ligne est due à une pathologie dans la géométrie de l'espace-temps elle-même, ou simplement à une pathologie du système de coordonnées (t, r, θ, ϕ) près de $r = 2M$. (comme exemple d'une pathologie induite par les coordonnées, considérons le voisinage de $\theta = 0$ sur une des sphères invariantes, $t = \text{const}$ et $r = \text{const}$. Ici $g_{\phi\phi}$ devient nul parce que le système de coordonnées se comporte mal ; pourtant ; la géométrie intrinsèque indépendante de coordonnées de la sphère s'y comporte bien. Pour un autre exemple, voir 1.1

L'inquiétante région de la géométrie de Schwarzschild , $r = 2M$ est appelée le "rayon gravitationnel", ou le "rayon de Schwarzschild ", ou "la sphère de Schwarzschild ". Elle est aussi appelée "singularité de Schwarzschild " dans certaines des vieilles littératures ; mais c'est un terme impropre, puisque, comme cela sera montré, la géométrie de l'espace-temps n'y est pas singulière.

Pour déterminer si la géométrie de l'espace-temps est singulière au rayon gravitationnel, envoyons-y un explorateur depuis le lointain pour établir une carte. Pour simplifier, laissons le tomber librement et radialement vers le rayon gravitationnel, portant son tétrade avec lui et il tombe. Sa trajectoire à travers l'espace-temps ["orbite parabolique", géodésique radiale de la métrique 31.1] est

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{2M} &= -\frac{2}{3} \left(\frac{r}{2M}\right)^{3/2} + \text{constante} \\ \frac{t}{2M} &= -\frac{2}{3} \left(\frac{r}{2M}\right)^{3/2} - 2 \left(\frac{r}{2M}\right)^{1/2} + \ln \left| \frac{(r/2M)^{1/2} + 1}{(r/2M)^{1/2} - 1} \right| + \text{constante} \end{aligned} \quad (31.2)$$

[voir 25.5 et spécialement l'équation (??) pour la dérivation et la discussion]. On obtient la coordonnée r de l'explorateur en termes de temps propre mesuré sur une horloge qu'il transporte, $r(\tau)$, en inversant la première équation ; on trouve sa coordonnée r en terme de temps de coordonnée $r(t)$ en inversant la seconde équation.

De toutes ces caractéristiques de la trajectoire du voyageur, on ressort plus clairement et troublant ; atteindre le rayon gravitationnel, $r = 2M$ nécessite un laps de temps propre fini, mais un laps de temps de coordonnées infini :

$$r/2M = 1 - (\tau + \text{constante})/2M \text{ quand on est près de } r = 2M \quad (31.3)$$

$$r/2M = 1 + \text{constante} \times \exp(-t/2M) \text{ à la limite quand } t \rightarrow \infty \quad (31.4)$$

(voir fig ??). Bien sur, le temps propre est la quantité pertinente pour le battement de coeur et sa santé. Aucun système de coordonnées n'a le pouvoir de l'empêcher d'atteindre $r = 2M$. Seule la géométrie de l'espace-temps indépendante des coordonnées peut faire cela ; et l'équation 31.3 montre qu'elle ne le fait pas !

Laissons l'explorateur approcher et atteindre $r = 2M$, donc. Quelle géométrie de l'espace-temps y mesure-t-il ? Est-elle singulière ou non-singulière ? Refixé en terme de mesure, est-ce les forces gravitationnelles de marée infinies déchirent le voyageur et l'écrasent comme il approche $r = 2M$, ou sent-il seulement des forces de marée finies que son corps peut en principe supporter ?

Les forces de marée senties par l'explorateur comme il passe un rayon donné r sont mesurées par les composantes du tenseur de courbure de Riemann selon son repère orthonormé (équation de la déviation géodésique). Pour calculer ces composantes de courbure à r , procédons en deux étapes.

(1) Calcule les composantes, pas dans le repère du voyageur, mais plutôt dans le repère orthonormal "statique"

$$\omega^{\hat{t}} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2} dt, \omega^{\hat{r}} = \frac{dr}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{1/2}}, \omega^{\hat{\theta}} = r d\theta, \omega^{\hat{\phi}} = r \sin\theta d\phi, \quad (31.5)$$

positionné à l'événement à travers lequel il passe ; le résultat [obtenu à partir des équations ?? et ?? en posant $e^{2\phi} = e^{-2\Lambda} = 1 - 2M/r$] est

$$R_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}\hat{r}} = -\frac{1}{r^2} \frac{2M}{r}, \quad R_{\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}} = R_{\hat{t}\hat{\phi}\hat{t}\hat{\phi}} = \frac{M}{r^3} \quad (31.6)$$

$$R_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} = \frac{1}{r^2} \frac{2M}{r}, \quad R_{\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}} = R_{\hat{r}\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}} = -\frac{M}{r^3} \quad (31.7)$$

tous les autres $R_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}$ s'annulent exceptés celles obtenues à partir de celles du dessus avec les symétries du **Riemann**

(2) calcule les composantes du repère de l'explorateur en appliquant aux composantes du "repère statique" (31.6) la transformation appropriée - pour $r > 2M$, une poussée dans la direction $\mathbf{e}_{\hat{r}}$ avec la vitesse ordinaire $v^{\hat{r}}$; pour $r < 2M$, pas une "poussée", mais une transformation donnée par la formule de poussée standard (boîte 2.4) avec $v^{\hat{r}} > 1$. Ici

$$v^{\hat{r}} = \frac{(g_{rr})^{1/2} dr}{(-g_{tt})^{1/2} dt} = \frac{dr/dt}{1 - 2M/r} = -\left(\frac{2M}{r}\right)^{1/2} \quad (31.8)$$

Le résultat incroyable (une conséquence des propriétés algébriques spéciales de la géométrie de Schwarzschild , et un peu analogue à ce qui se passe - ou, plutôt, ne se passe pas - aux composantes du champ électromagnétique, **E** et **B**, quand ils sont tous les deux parallèles à une poussée) est cela : toutes les composantes de **Riemann** sont laissées complètement non affectées par la poussée. Si $e_{\hat{\rho}}$ est le vecteur de base radiale du voyageur, et $e_{\hat{r}=u}$ est son vecteur de base de temps, alors

$$\begin{aligned} R_{\hat{r}\hat{\rho}\hat{r}\hat{\rho}} &= -\frac{1}{r^2} \frac{2M}{r} \\ R_{\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}} &= R_{\hat{r}\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}} = \frac{M}{r^3} \\ R_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} &= \frac{1}{r^2} \frac{2M}{r} \\ R_{\hat{\rho}\hat{\theta}\hat{\rho}\hat{\theta}} &= R_{\hat{\rho}\hat{\phi}\hat{\rho}\hat{\phi}} = -\frac{M}{r^3} \end{aligned} \quad (31.9)$$

(voir exercice 31.1) Le prix à payer de ce calcul : selon les équation 31.9, aucune des composantes de **Riemann** dans le repère orthonormal de l'explorateur deviennent infinies au rayon gravitationnel. Les forces de marée que sent le voyageur comme il approche $r = 2M$ sont finies ; elles ne le déchirent pas - au moins pas quand la masse M est suffisamment grande, parce que à $r = 2M$ la composante non nulle typique $R_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}$ du tenseur de courbure est de

l'ordre de $1/M^2$. Le rayon gravitationnel est une région de l'espace-temps non singulière, e comportant parfaitement bien, et rien ne peut empêcher l'explorateur de tomber dans l'intérieur.

Au contraire, profondément à l'intérieur du rayon gravitationnel à $r = 0$ le voyageur doit rencontrer des forces de marée infinies, indépendamment du chemin qu'il utilise pour l'atteindre. On dit que " $r = 0$ est une singularité physique de l'espace-temps "Pour le voir, on a besoin de calculer "l'invariant de courbure" depuis les équations 31.6 ou 31.9 :

$$I \equiv R_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}}R^{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}} = 48M^2/r^6 \tag{31.10}$$

BOITE 31.1
[...]
exercice 31.1

31.3 comportement des coordonnées de Schwarzschild à $r = 2M$

31.4 plusieurs systèmes de coordonnées se comportant convenablement

boîte 31.1 motivation pour les coordonnées de Kruskal-Szekeres

A. coordonnées de Eddington-Finkelstein

La motivation pour le système de Kruskal-Szekeres commence en introduisant un système de coordonnées différentes, d'abord conçu pour par Eddington(1924) et redécouvert par Finkelstein(1958). Eddington et Finkelstein utilisent comme fondation de leur système de coordonnées, non pas des particules chutant librement comme le fit Novikov, mais des photons librement chutant. Plus particulièrement, ils introduisent des coordonnées \tilde{U} et \tilde{V} qui sont des étiquetés pour les géodésiques null radiales, sortantes et entrantes. Les géodésiques sont données par

$$ds^2 = 0 = -(1 - 2M/r)dt^2 + (1 - 2M/r)^{-1}dr^2$$

De manière équivalente,, les géodésiques sortant sont données par $\tilde{U} = constante$,où

$$\tilde{U} \equiv t - r^* \tag{1a}$$

et les géodésiques rentrantes sont données par $\tilde{V} = constante$, où

$$\tilde{V} \equiv t + r^* \tag{1b}$$

Ici r^* est "la coordonnée de tortoise" des paragraphes 25.5 et figure ?? :

$$r^* \equiv r + 2M \ln |r/2M - 1| \tag{1c}$$

Coordonnées entrantes de Eddington-Finkelstein - Adoptons r et \tilde{V} comme coordonnées à la place de r et t

La métrique de Schwarzschild devient

$$ds^2 = -(1 - 2M/r)d\tilde{V}^2 + 2d\tilde{V}dr + r^2d\Omega^2 \tag{2}$$

Le cone de lumière radiale $ds^2 = 0$ a une jambe

$$d\tilde{V}/dr = 0$$

et l'autre jambe

$$\frac{d\tilde{V}}{dr} = \frac{2}{1 - 2M/r} \quad (3b)$$

- 31.5** relation entre les coordonnées de Kruskal-Szekeres et les coordonnées de Schwarzschild
- 31.6** dynamique de la géométrie de Schwarzschild

Chapitre 32

Effondrement gravitationnel

32.1 pertinence de la géométrie de Schwarzschild

32.2 théorème de Birkhoff

32.3 géométrie extérieure d'une étoile s'effondrant

=====
=====

32.4 effondrement d'une étoile avec une densité uniforme et une pression nulle

32.5 effondrement symétrique sphérique avec des forces de pression interne

32.6 le sort d'un homme qui tombe dans la singularité à $r = 0$

Considérons la situation critique d'un astrophysicien expérimental debout sur la surface d'une étoile tombant librement tandis qu'il s'effondre vers $R = 0$.

Comme l'effondrement avance vers $R = 0$, les diverses parties du corps de l'astrophysicien expérimentent des forces gravitationnelles différentes. Ses pieds, qui sont sur la surface de l'étoile, sont attirés vers le centre de l'étoile par une force gravitationnelle infiniment croissantes, pendant que sa tête qui est plus loin, est accélérée vers le bas par quelque chose un peu plus petit, quoiqu'une force toujours croissante. La différence entre les deux accélérations (force de marée) augmente encore et encore quand l'effondrement se poursuit, devenant finalement infini quand R atteint zéro. Le corps de l'astrophysicien, qui ne peut supporter de telles forces extrêmes, souffre d'étirements illimités entre la tête et les pieds quand R tombe à zéro.

Mais ce n'est pas tout. Simultanément avec cet étirement entre tête et pied, l'astrophysicien est attiré par le champ gravitationnel dans des régions de l'espace-temps avec une surface circonferentielle toujours diminuant, $4\pi r^2$. Pour le réaliser, les forces gravitationnelles de marée doivent comprimer l'astrophysicien de tous les côtés comme elles l'étirent de la tête jusqu'aux pieds. La compression circonferentielle est en réalité plus extrême que l'étirement longitudinal ; donc l'astrophysicien , dans la limite $R \rightarrow 0$ est écrasé à un volume nul et à une longueur infiniment étendue.

La discussion au dessus peut être mise sur un pied mathématique comme suit.

Il y a 3 étapes dans la mort de l'astrophysicien : (1) la première étape, quand son corps résiste avec succès aux forces de marée ; (2) l'étape intermédiaire, quand il est graduellement succombant ; et (3) l'étape finale, quand il a été complètement submergé.

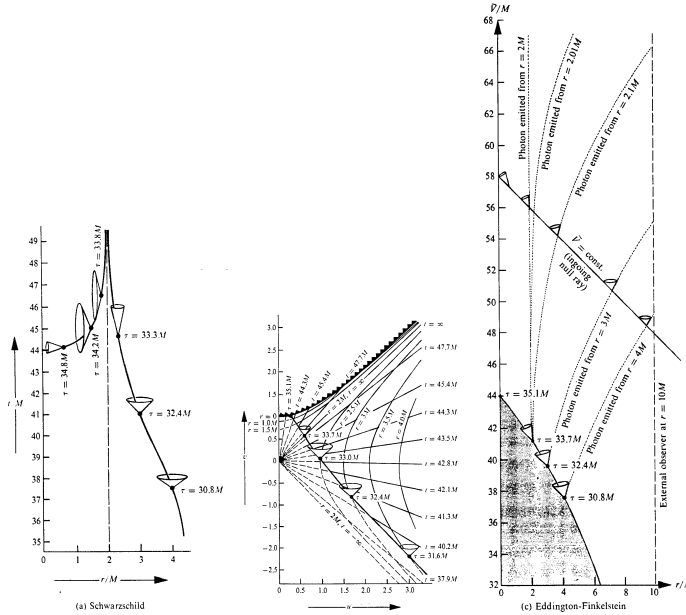


FIGURE 32.1 – titre

L'effondrement free-fall d'une étoile de rayon initial $R_i = 10M$ comme représenté alternativement dans (a) coordonnées de Schwarzschild , (b) coordonnées de Kruskal-Szekeres, et (c) les coordonnées rentrantes de Eddington-Finkelstein (voir boîte ??). La région de l'espace-temps à l'intérieur de l'étoile s'effondrant est en gris, son extérieur est en blanc. Seule la géométrie de la région extérieure est celle de Schwarzschild . La courbe séparant les régions grises et blanches est la ligne d'univers géodésique de la surface de l'étoile s'effondrant (équations ?? or ?? avec $r_{max} = R_i = 10M$). Cette ligne d'univers est paramétrisée par le temps propre, τ , comme mesuré par un observateur assis sur la surface de l'étoile ; les cônes de lumière radiaux, comme calculés par $ds^2 = 0$, y sont attachés.

Note que, bien que les formes des cônes de lumière ne sont pas toutes les même relativement aux coordonnées de Schwarzschild ou relatives aux coordonnées de Eddington-Finkelstein, elles sont toutes les même relatives aux coordonnées de Kruskal-Szekeres. C'est parce que les rayons lumineux voyagent le long ddes lignes de 45-degré dans le plan u, v ($dv = \pm du$) mais ils voyagent le long de chemins courbés dans le plan r, t et plan r, \tilde{V} .

Le diagramme espace-temps de Kruskal-Szekeres montré ici est relié au diagramme de Schwarzschild par les équations (??) plus une translation de temps de Schwarzschild : $t \rightarrow t + 42,8M$. Le diagramme de Eddington-Finkelstein est relié au diagramme de Schwarzschild par

$$\tilde{V} = t + r^* = t + r + 2M \ln|r/2M - 1|$$

(voir boîte ??)

Il est évident par ces diagrammes que l'effondrement free-fall est caractérisé par un rayon constamment diminuant, qui baisse de $R = 10M$ jusqu'à $R = 0$ dans un court intervalle de temps propre comoving, $\Delta\tau = 35,1M$. Le point

$R = 0$ et la région entière $r = 0$ en dehors de l'étoile représente une singularité physique à laquelle les forces gravitationnelles de marée - selon la classique relativité générale non quantifiée - peut et va écraser la matière à une densité infinie (voit fin de 31.2 et ??)

Le diagramme de Eddington-Finkelstein décrit une série de photons émis radialement depuis la surface de l'étoile s'effondrant, et reçus par un observateur à $r = R_{initial} = 10M$. L'observateur reçoit finalement tous les photons émis radialement depuis l'extérieur du rayon gravitationnel ; tous les photons émis après que l'étoile passe à travers son rayon gravitationnel se font finalement arrêtés à la singularité à $r = 0$; et n'importe quel photon émis radialement au rayon gravitationnel reste pour toujours au rayon gravitationnel.

L'effondrement non-free-fall est similaire à l'effondrement décrit ici. Quand les gradients de pression sont présents, seul le cadre détaillé de la ligne d'univers de la surface de l'étoile change.

Durant la première étape, on peut analyser les forces de marée avec l'aide de l'équation de déviation géodésique, évalué dans le référentiel orthonormé de l'astrophysicien $\omega^{\hat{\tau}}$, $\omega^{\hat{\rho}}$, $\omega^{\hat{\theta}}$, $\omega^{\hat{\phi}}$ (voir 31.2). Dans ce référentiel, les composantes non nulles du tenseur de courbure de Riemann sont données par les équations (31.9) :

$$\begin{aligned} R_{\hat{\tau}\hat{\rho}\hat{\tau}\hat{\rho}} &= -\frac{1}{r^2} \frac{2M}{r} \\ R_{\hat{\tau}\hat{\theta}\hat{\tau}\hat{\theta}} &= R_{\hat{\tau}\hat{\phi}\hat{\tau}\hat{\phi}} = \frac{M}{r^3} \\ R_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} &= \frac{1}{r^2} \frac{2M}{r} \\ R_{\hat{\rho}\hat{\theta}\hat{\rho}\hat{\theta}} &= R_{\hat{\rho}\hat{\phi}\hat{\rho}\hat{\phi}} = -\frac{M}{r^3} \end{aligned} \quad (32.1)$$

Les équations de la déviation géodésique disent que deux particules se déplaçant librement, momentanément au repos dans le référentiel inertiel local de l'astrophysicien, et séparés par le 3-vecteur

$$\xi = \xi^{\hat{j}} e_{\hat{j}}$$

doivent accélérer avec une accélération relative donnée par

$$D^2 \xi^{\hat{j}} / d\tau^2 = -R_{\hat{\tau}\hat{\kappa}\hat{\tau}}^{\hat{j}} \xi^{\hat{\kappa}} = -R_{\hat{j}\hat{\tau}\hat{\kappa}\hat{\tau}} \xi^{\hat{\kappa}} = -R_{\hat{\tau}\hat{j}\hat{\tau}\hat{\kappa}} \xi^{\hat{\kappa}}$$

En utilisant les composantes (32.1) du tenseur de courbure, on voit que

$$\begin{aligned} D^2 \xi^{\hat{\rho}} / d\tau^2 &= \frac{1}{r^2} \frac{2M}{r} \xi^{\hat{\rho}} \\ D^2 \xi^{\hat{\theta}} / d\tau^2 &= -\frac{M}{r^3} \xi^{\hat{\theta}} \\ D^2 \xi^{\hat{\phi}} / d\tau^2 &= -\frac{M}{r^3} \xi^{\hat{\phi}} \end{aligned} \quad (32.2)$$

Pour appliquer ces équations au corps de l'astrophysicien, idéalise le (pour simplifier) comme une boîte rectangulaire homogène de masse $\mu \approx 75kg$, de longueur $l \approx 1,8m$ dans la direction $e_{\hat{\rho}}$, et de largeur et profondeur $w \approx 0,2m$ dans les directions $e_{\hat{\theta}}$ et $e_{\hat{\phi}}$. Ensuite calcule les tensions qui doivent être réglées dans ce corps idéalisé pour empêcher ses particules de se déplacer le long de géodésiques divergentes (et convergentes).

A partir des équations (32.1 et 32.2) il est évident que les directions principales de tension doivent être $e_{\hat{\rho}}, e_{\hat{\theta}}$ et $e_{\hat{\phi}}$ (càd dans la base $e_{\hat{\rho}}, e_{\hat{\theta}}, e_{\hat{\phi}}$, le tenseur de tension doit être diagonal). La composante longitudinale de la tension, au centre de masse de l'astrophysicien, peut être évaluée comme suit. Un élément de volume de ce corps de masse $d\mu$, positionné à la hauteur h au dessus du centre de masse (distance h mesuré le long de la direction $e_{\hat{\rho}}$) devra s'éloigner du centre de masse avec une accélération avec $a = (2M/r^3)h$, si il lui était permis de se déplacer librement. Pour empêcher cette accélération, les muscles de l'astrophysicien doivent exercer une force

$$dF = ad\mu = (2M/r^3)hd\mu$$

Cette force contribue à la tension de l'autre côté du plan horizontal (plan $e_{\hat{\theta}} \wedge e_{\hat{\phi}}$) à travers le centre de masse. La force totale à travers le plan est la somme des forces de toutes les masses au dessus de lui (qui est aussi égal à la somme des forces sur l'élément au dessous de lui) :

$$F = \int_{\text{région au dessus du plan}} ad\mu = \int_0^{l/2} \left(\frac{2Mh}{r^3} \right) \left(\frac{\mu}{lw^2} \right) (w^2 dh) = \frac{1}{4} \frac{\mu M l}{r^3}$$

La tension est cette force divisée par l'aire de section efficace w^2 , avec un signe moins parce que c'est une tension plutôt qu'une pression :

$$T_{\hat{r}\hat{\phi}} = -\frac{1}{4} \frac{\mu M l}{w^2 r^3} \approx -1,1 \times 10^{15} \frac{M/M_{\odot}}{(r/1 \text{ km})^3} \frac{\text{dynes}}{\text{cm}^2} = -1,1 \times 10^{14} \frac{M/M_{\odot}}{(r/1 \text{ km})^3} \text{Pa} \quad (32.4)$$

Les composantes de la tension dans les directions $e_{\hat{\theta}}$ et $e_{\hat{\phi}}$ au centre de masse sont, similairement,

$$T_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = T_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = \frac{1}{8} \frac{\mu M}{l r^3} \approx 0,7 \times 10^{13} \frac{M/M_{\odot}}{(r/1 \text{ km})^3} \frac{\text{dynes}}{\text{cm}^2} = 0,7 \times 10^{12} \frac{M/M_{\odot}}{(r/1 \text{ km})^3} \text{Pa} \quad (32.5)$$

(Rappelez-vous que 1 atmosphère de pression est $1,01 \times 10^6 \text{ dynes/cm}^2$).

Le corps humain ne peut pas supporter une tension ou une pression supérieure à $\gtrsim 100$ atmosphères $\approx 10^8 \text{ dynes/cm}^2$ sans se casser. En conséquence, un astrophysicien sur une étoile d'une masse solaire s'effondrant librement sera tué par des forces de marée quand le rayon de l'étoile est $R \sim 200 \text{ km} \gg 2M \approx 3 \text{ km}$.

Au moment où l'étoile est plus petite que son rayon gravitationnel, les baryons du corps de l'astrophysicien se déplacent le long de géodésiques; ses muscles et os sont complètement révélés. Dans cette étape finale de l'effondrement, les géodésiques du type temps sont des courbes le long desquelles la coordonnée de temps de Schwarzschild t , est presque constante [cf. le rétrécissement du cône de lumière près de $r = 0$ dans la 32.1; aussi l'équation 31.2 dans la limite $r \ll 2M$]. Les pieds de l'astrophysicien touchent la surface de l'étoile à une valeur de t - disons $t = t_f$ - alors que sa tête se déplace le long de la courbe $t = t_h > t_f$. En conséquence, la longueur du corps de l'astrophysicien augmente selon la formule

$$l_{\text{astrophys}} = [g_{tt}(R)]^{1/2} [t_h - t_f] = [2M/R]^{1/2} [t_h - t_f] \propto R^{-1/2} \propto (\tau_{\text{effondrement}} - \tau)^{-1/3} \quad (32.6)$$

Ici $\tau = [-\int^R |g_{rr}|^{1/2} dr + \text{constante}]$ est le temps propre comme il serait mesuré par l'astrophysicien si il était encore vivant, et $\tau_{\text{effondrement}}$ est le temps auquel il touche $r = 0$. Le champ gravitationnel contraint aussi les baryons du corps de l'astrophysicien à tomber le long des lignes d'univers où θ et ϕ constants durant les étapes finales de l'effondrement. En conséquence, son aire de section efficace diminue selon la loi

$$A_{\text{astrophys}} = [g_{\theta\theta}(R)g_{\phi\phi}(R)]^{1/2} \Delta\theta\Delta\phi \propto R^2 \propto (\tau_{\text{effondrement}} - \tau)^{4/3} \quad (32.7)$$

En combinant les équations (32.6 et 32.7) on voit que le volume du corps de l'astrophysicien diminue, durant les derniers moments de l'effondrement, selon la loi

$$V_{\text{astrophysicien}} = l_{\text{astrophysicien}} A_{\text{astrophysicien}} \propto R^{3/2} \propto (\tau_{\text{effondrement}} - \tau) \quad (32.8)$$

Cet écrasement de matière à une densité infinie par des forces gravitationnelles de marée infiniment grandes peuvent se produire non seulement sur la surface de l'étoile s'effondrant, mais aussi à n'importe quel autre point le long de la singularité $r = 0$ en dehors de la surface de l'étoile. En conséquence, un pilote de fusée fou qui s'aventure en dessous du rayon $r = 2M$ du champ gravitationnel externe est condamné à la destruction.

Pour davantage de discussions sur les singularités de l'espace-temps, et sur la possibilité que les effets gravitationnels quantiques puissent forcer une reconsidération des singularités prédites par la théorie classique de la gravitation, voir ??, ?? et ??

32.7 effondrement gravitationnel réaliste - une vue d'ensemble

Chapitre 33

TROUS NOIRS

33.1 POURQUOI "TROU NOIR"

33.2 Les champs gravitationnels et électromagnétiques d'un trou noir

33.3 Masse, moment angulaire, charge et moment magnétique

33.4 Symétries et glissement de repères

33.5 Congruences ??

33.6 Stockage et enlèvement de l'énergie

33.7 Transformations Réversibles et irréversibles

33.7.1 Symétries et glissement de repères

33.7.2 Le résultat

Chapitre 34

Techniques globales, horizons et théorèmes de singularité

- 34.1 techniques globales contre techniques locales
- 34.2 "infinité" dans un espace-temps asymptotiquement plat
- 34.3 causalité et horizons
- 34.4 structure globale des horizons
- 34.5 preuve de la seconde loi de la dynamique des trous noirs
- 34.6 théorèmes de singularité et le "problème de l'état final"

Huitième partie

ONDES GRAVITATIONNELLES

Chapitre 35

Propagation des ondes gravitationnelles

- 35.1 points de vue
- 35.2 revue de "théorie linéarisée" dans le vide
- 35.3 solutions d'onde plane dans une théorie linéarisée
- 35.4 la gauge transverse sans trace (TT)
- 35.5 déviation géodésique dans une onde gravitationnelle linéarisée
- 35.6 la polarisation d'une onde plane
- 35.7 le stress-énergie apporté par une onde gravitationnelle
- 35.8 ondes gravitationnelles dans une théorie complète de la relativité générale
- 35.9 une solution exacte de type onde plane
- 35.10 propriétés physiques d'une onde plane exacte
- 35.11 comparaison d'une exacte onde plane électromagnétique avec une onde plane gravitationnelle
- 35.12 un nouveau point de vue sur une onde plane exacte
- 35.13 l'approximation ondes courtes
- 35.14 effet de la courbure d'arrière plan sur la propagation des ondes
- 35.15 tenseur stress-énergie pour les ondes gravitationnelles

Chapitre 36

Génération d'ondes gravitationnelles

La matière est représentée par la courbure, mais toute courbure ne représente pas de la matière, il peut y avoir courbure "dans le vide". G.LEMAITRE in [14] p. 440

36.1 la nature quadrupolaire des ondes gravitationnelles

Les masses dans un système isolé presque newtonien se déplacent l'une autour de l'autre. Combien de rayonnement gravitationnel émettent-ils ?

Pour un ordre de grandeur estimé, on peut appliquer les formules familière de rayonnement de la théorie électromagnétique, avec le remplacement $e^2 \rightarrow -m^2$, qui convertit la loi de Coulomb statique en loi de l'attraction de Newton. Cette procédure traite la gravité comme si elle était un champ de spin 1 (vecteur), plutôt qu'un champ de spin 2 (tenseur); en conséquence, il introduit des erreurs modérés dans les facteurs numériques et les distributions angulaires. Mais il donne une estimation adéquate de la puissance totale rayonnée.

Dans la théorie électromagnétique, le rayonnement dipolaire électrique domine, avec une puissance émise ?? de "luminosité" L , donné par (voir ?? et ??)

$$L_{\text{dipole électrique}} = (2/3)e^2 \mathbf{a}^2$$

pour une seule particule avec l'accélération \mathbf{a} et un moment dipolaire changeant comme $\ddot{\mathbf{d}} = e\dot{\mathbf{x}} = e\mathbf{a}$;

$$L_{\text{dipole électrique}} = (2/3)\ddot{\mathbf{d}}^2$$

pour un système général avec un moment dipolaire \mathbf{d} [..]

$$\mathbf{d} = \sum_{\text{particules } A} m_A \mathbf{x}_A$$

Son premier taux de changement temporel est le momentum total du système ,

$$\dot{\mathbf{d}} = \sum_{\text{particules } A} m_A \dot{\mathbf{x}}_A = \mathbf{p}$$

Le second changement temporel du moment dipolaire de la masse ?? doit disparaître parce que la loi de conservation du momentum, $\dot{\mathbf{d}} = \dot{\mathbf{p}} = 0$. Ainsi *il ne peut y avoir aucune radiation d'un dipôle de masse en physique gravitationnelle.*

[..]

$$\boldsymbol{\mu} = \sum_A (\text{position de } A) \times (\text{courant du à } A) = \sum_A \mathbf{r}_A \times (m\mathbf{v}_A) = \mathbf{J}$$

donc il ne peut pas rayonner. *Ainsi il ne peut pas y avoir de radiation dipolaire gravitationnelle de n'importe quelle sorte.*

Quand on se tourne vers la radiation quadrupolaire, on obtient finalement un résultat non nul voir (??). La puissance extérieure prédite par la théorie électromagnétique,

$$L_{\text{quadrupole électrique}} = \frac{1}{20} \ddot{\mathbf{Q}}^2 \equiv \frac{1}{20} \ddot{Q}_{jk} \ddot{Q}_{jk}$$

$$Q_{jk} \equiv \sum_A e_A \left(x_{Aj} x_{Ak} - \frac{1}{3} \delta_{jk} r_A^2 \right)$$

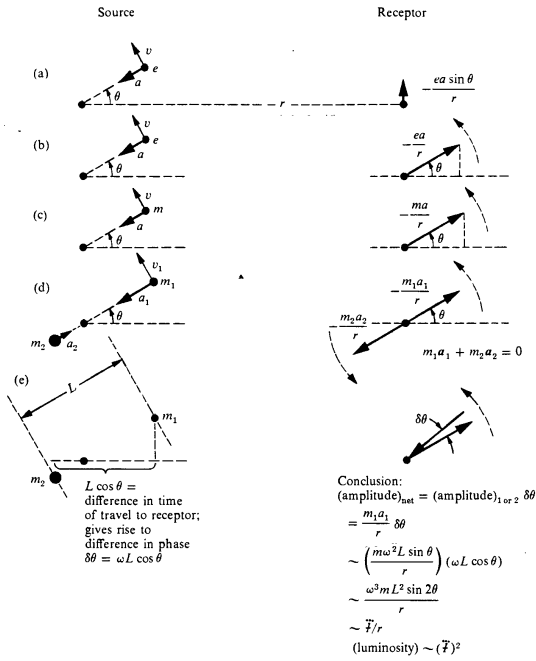
(??) a sa contre partie gravitationnelle

$$L_{\text{quadrupole de masse}} = \frac{1}{5} \langle \ddot{\mathbf{I}}^2 \rangle \equiv \frac{1}{5} \langle \ddot{\mathbf{I}}_{jk} \ddot{\mathbf{I}}_{jk} \rangle \tag{36.1}$$

$$\ddot{\mathbf{I}}_{jk} \equiv \sum_A m_A \left(x_{Aj} x_{Ak} - \frac{1}{3} \delta_{jk} r_A^2 \right) = \int \rho \left(x_j x_k - \frac{1}{3} \delta_{jk} r^2 \right) d^3x \tag{36.2}$$

[.] [.]

FIGURE 36.1 – figure 36.1



$$\mathbf{I}_{jk} = I_{jk} - \frac{1}{3} \delta_{jk} \text{trace}(I_{ab}) = I_{jk} - \frac{1}{3} \delta_{jk} I = \int \rho \left(x_j x_k - \frac{1}{3} \delta_{jk} r^2 \right) d^3x \tag{36.3}$$

36.2 puissance rayonnée en terme de flux de puissance interne

$$\ddot{\mathbf{I}}_{jk} \sim L_{\text{interne}} \equiv \left(\begin{array}{c} \text{puissance flowing ??} \\ \text{d'un côté du système à l'autre} \end{array} \right) \tag{36.4}$$

$$L_{OG} \sim (L_{\text{interne}})^2 \tag{36.5}$$

$$L_0 \equiv c^5/G = 3,63 \times 10^{59} \text{ erg/sec} = 2,03 \times 10^5 M_{\odot} c^2/\text{sec} \tag{36.6}$$

$$L_{OG}/L_{interne} \sim L_{interne}/L_0 \quad (36.7)$$

$$(36.8)$$

36.3 générateurs en laboratoire des ondes gravitationnelles

Comme générateur au laboratoire d'ondes gravitationnelles, considérons une poutre d'acier=1 mètre, de longueur $l=20$ mètres, de densité $\rho = 7,8g/cm^3$, de masse $M = 4,9 \times 10^8g$ (490 tonnes), et une résistance ?? à la traction $t = 40000$ pounds par inch carré ou $3 \times 10^9dyne/cm^2$. Laissons la poutre tourner autour de son centre (donc il tourne toujours et toujours), avec une vitesse angulaire ω limitée par l'équilibre entre les forces centrifuges et la force ?? de traction

$$\omega = (8t/\rho l^2)^{1/2} = 28rad/s$$

Le flux de puissance interne

$$\begin{aligned} L_{interne} &= \left(\frac{1}{2} I \omega^2 \right) \omega = \frac{1}{24} M l^2 \omega^3 \\ &\approx 2 \times 10^{18} erg/sec \approx 10^{-41} L_0 \end{aligned}$$

L'ordre de grandeur de la puissance rayonnée est

$$L_{OG} \sim (10^{-41})^2 L_0 \sim 10^{-23} erg/sec \quad (36.9)$$

36.4 sources astrophysiques d'ondes gravitationnelles : discussion générale

$$(36.10)$$

$$(36.11)$$

$$(36.12)$$

$$(36.13)$$

$$(36.14)$$

$$(36.15)$$

$$(36.16)$$

$$(36.17)$$

$$(36.18)$$

$$(36.19)$$

$$(36.20)$$

$$(36.21)$$

$$(36.22)$$

$$(36.23)$$

$$(36.24)$$

(36.25)

(36.26)

(36.27)

(36.28)

(36.29)

(36.30)

(36.31)

(36.32)

(36.33)

(36.34)

36.5 effondrement gravitationnel, trous noirs, supernovae, et pulsars comme sources

36.6 étoiles binaires comme source

36.7 formules pour la radiation depuis des sources se déplaçant doucement presque newtoniennes

36.8 réaction de radiation dans des sources se déplaçant doucement

36.9 fondations pour la dérivation des formules de radiation

[.]

$$h_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \quad (36.35)$$

[.]

$$\bar{h}_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h; \quad h = h_{\alpha}^{\alpha} = h_{\alpha\beta}\eta^{\alpha\beta} \quad (36.36)$$

De plus, on peut toujours prendre des coordonnées spéciales telles que les quatre conditions

$$\bar{h}_{\mu}^{\alpha}{}_{,\alpha} = 0 \quad (36.37)$$

sont satisfaites partout, en incluant l'intérieur de la source.

Avec ces définitions et conventions, $\bar{h}_{\mu\nu}$ devient le champ gravitationnel de la théorie linéarisée loin de la source, et aussi à l'intérieur si la gravité est y est faible . Mais si la gravité intérieure est forte ($\bar{h}_{\mu\nu} \ll 1$), $\bar{h}_{\mu\nu}$ à l'intérieur n'a absolument aucune connexion avec la théorie linéarisée.

[.]

36.10 évaluation pour un champ de radiation dans l'approximation de déplacement lent

36.11 dérivation du potentiel de réaction de radiation

Chapitre 37

Détection des ondes gravitationnelles

- 37.1 systèmes de coordonnées et ondes empêtantes
- 37.2 accélérations dans des détecteurs mécaniques
- 37.3 types de détecteurs mécaniques
- 37.4 détecteurs mécaniques vibrant : remarques introductives
- 37.5 détecteur idéalisé dominé par l'onde, excité par un flux régulier des ondes monochromatiques
- 37.6 détecteur idéalisé dominé par l'onde, excité par un flux arbitraire de radiation
- 37.7 détecteur général dominé par l'onde, excité par un flux arbitraire de radiation

[.]

exercice 37.1 puissance rerayonnée

exercice 37.2 sections efficaces calculées par la balance détaillée??

boîte 37.1 détecteur vibrant et résonant de arbitraire shape??

A caractéristiques physiques du détecteur

- (a) le détecteur est un objet solide (terre, barre de Weber, ?? ...) avec une densité de distribution $\rho(x)$ et une masse totale $M = \int \rho d^3x$.

(b) Le détecteur a des modes normaux de vibration. Le n^{ème} mode normal est caractérisé par :

$$\begin{aligned}\omega_n &= \text{fréquence angulaire} \\ \tau_n &= \left(\begin{array}{l} \text{temps e-folding ?? pour l'énergie de vibration} \\ \text{pour decay ?? comme résultat de tension ?? interne} \end{array} \right) \gg 1/\omega_n \\ u_n(x) &= \text{fonction propre (définie ici pour être sans dimension et réelle)}\end{aligned}$$

Les fonctions propres u_n sont orthonormées, donc

$$\int \rho u_n \cdot u_m d^3x = M \delta_{nm}$$

(c) durant une vibration en mode normal avec $E_{vibration} \gg kT$, un élément de masse originellement à \hat{x} reçoit le déplacement

$$\delta x = \xi = u_n(x) B_n e^{-i\omega_n t - t/\tau_n} \quad B_n : [\textit{amplitude constante}]$$

la densité à x fixée change par

$$\delta \rho = -\Delta \cdot (\rho u_n) B_n e^{-i\omega_n t - t/\tau_n}$$

et le tenseur du moment d'inertie oscille

$$\delta I_{jk} = I_{(n)jk} B_n e^{-i\omega_n t - t/\tau_n}$$

Ici $I_{(n)jk}$ est "le moment du facteur d'inertie pour le nième mode normal" :

$$\begin{aligned}I_{(n)jk} &\equiv \int -(\rho u_n^l)_{,l} x^j x^k d^3x \\ &= \int \rho (u_n^j x^k + u_n^k x^j) d^3x\end{aligned}$$

[dimensions : masse \times longueur, multiplié par B_n (longueur) pour obtenir I_{jk}].
Le facteur ?? quadrupole réduit correspondant pour le n^{ème} mode normal est \mathcal{I}

$$\mathcal{I}_{(n)jk} \equiv I_{(n)jk} - \frac{1}{3} I_{(n)ll} \delta_{jk}$$

B signification des paramètres révisés

[..]

37.8 détecteurs de bruit

$$|\Delta B_n^{GW}| = \left(\frac{2F_\nu(\omega_n/2\pi) \int \sigma_n d\nu}{M\omega_n^2} \right)^{1/2} \quad (37.1)$$

37.9 détecteurs non mécaniques

37.10 en regardant vers le futur

boîte 37.2 détectabilité des ondes coup de marteau issues de sources astrophysiques : deux exemples (les calculs suivants ne sont précis seulement qu'à environ un ordre de grandeur

A. ondes issues d'une étoile de 10 masses solaires s'effondrant pour former un trou noir ; détecteur de 1972 avec senseur de 1975 (?)

1. caractéristiques prédites des radiations :

$$\begin{aligned} (\text{intensité sur terre}) &= F_\nu \sim \frac{M_\odot}{4\pi(\text{distance})^2\nu} \\ &\sim (2 \times 10^5 \text{ ergs/cm}^2 \text{ Hz}) [(\text{distance au centre de la galaxie})/\text{distance}]^2 \\ (\text{fréquences des ondes}) &= \nu \sim 10^3 \text{ Hz} \\ (\text{largeur de bande des ondes}) &= \Delta\nu \sim 10^3 \text{ Hz} \\ (\text{durée de la rafale}) &= \tau_{GW} \sim 10^3 \text{ jusqu'à } 10^{-1} \text{ s} \end{aligned}$$

2. propriété des détecteurs : une barre de Weber, vibrant dans son mode fondamental avec

$$M = 10^6 \text{ g} = 10^3 \text{ kg} \int \sigma d\nu = 10^{-21} \text{ cm}^2 \text{ Hz} = 10^{-25} \text{ m}^2 \text{ Hz} \quad (\text{exercice ??})$$

$$\nu_0 = \omega_0/2\pi = 1660 \text{ Hz}, T = 3 \text{ K} \quad (\text{température de l'Hélium liquide})$$

$$\tau_0 = 20 \text{ secondes}$$

$$B_0^{rms} = \left(\frac{2 \times 1,37 \times 10^{-16} \times 3 \text{ erg}}{10^6 \text{ g} \times 10^8 \text{ s}^{-2}} \right)^{1/2} = 3 \times 10^{-15} \text{ cm} = 3 \times 10^{-17} \text{ m}$$

$$|\Delta B_0^{thermique}| = (3 \times 10^{-15} \text{ cm})(10^{-3}/20)^{1/2} = 2 \times 10^{-17} \text{ cm} = 2 \times 10^{-19} \text{ m} \text{ pendant } \Delta t = 10^{-3} \text{ s}$$

$$|\Delta B_0^{thermique}| = 2 \times 10^{-16} \text{ cm} = 2 \times 10^{-18} \text{ m} \text{ pendant } \Delta t = 0,1 \text{ s}$$

3. effet des ondes [équation 37.1] :

$$|\Delta B_0^{GW}| = \left(\frac{2 \times 2 \times 10^5 \times 10^{-21} \text{ ergs}}{10^6 \times 10^8 \text{ s}^{-2}} \right)^{1/2} \left(\frac{\text{centre de la galaxie}}{\text{distance}} \right) = 2 \times 10^{-15} \text{ cm} \left(\frac{\text{distance au centre de la galaxie}}{\text{distance}} \right)$$

4. conclusion : les ondes gravitationnelles issues d'une étoile massive s'effondrant pour former un trou noir n'importe où dans notre galaxie sont facilement détectable, si on peut construire un "senseur" pour mesurer les changements dans les amplitudes de vibration de magnitude $\lesssim 10^{-15} \text{ cm}$ sur une échelle de temps $< 0,1 \text{ s}$. Cela apparaît faisable avec la technologie de 1972 ; voir [13]

des ondes issues d'une explosion de supernova dans le groupe de galaxies virgo ; un détecteur qui pourrait être constructible vers la fin 1970 ou début 1980

1. caractéristiques prédites des radiations :

$$\begin{aligned} (\text{intensité sur terre}) &= F_\nu \sim \frac{0,03 M_\odot}{4\pi(11 \text{ megaparsecs})^2\nu} \\ &\sim (4 \times 10^{-3} \text{ ergs/cm}^2 \text{ Hz}) \end{aligned}$$

$$(\text{fréquences des ondes}) = \nu \sim 10^3 \text{ Hz}$$

$$(\text{largeur de bande des ondes}) \sim \nu \sim 10^3 \text{ Hz}$$

$$(\text{durée de la rafale}) = \tau_{GW} \sim 0,3 \text{ s} \text{ ou } \tau_{GW} \sim 2 \times 10^{-3} \text{ s}^a$$

2. détecteur : une barre de type Weber faite non pas en métal, mais d'une monocristal de quartz de 1,000 kg, refroidi à une température de $3 \times 10^{-3} \text{ K}$. (pour un tel monocristal, on pense que le temps d'amortissement augmenterait en proportion inverse de la température, $\tau_0 \propto 1/T$.) Les propriétés estimées d'un tel détecteur :

$$M \sim 10^6 \text{ g} = 10^3 \text{ kg} \int \sigma d\nu = 10^{-21} \text{ cm}^2 \text{ Hz} = 10^{-25} \text{ m}^2 \text{ Hz} \quad (\text{comme pour la barre de Weber})$$

$$\nu_0 = \omega_0/2\pi = 1500 \text{ Hz}, T = 3 \times 10^{-3} \text{ K}$$

$$\tau_0 \sim 10^6 \text{ secondes}$$

$$B_0^{rms} = \left(\frac{2 \times 1,37 \times 10^{-16} \times 3 \times 10^{-3} \text{ erg}}{10^6 \text{ g} \times 10^8 \text{ s}^{-2}} \right)^{1/2} = 1 \times 10^{-16} \text{ cm} = 1 \times 10^{-18} \text{ m}$$

$$|\Delta B_0^{thermique}| = (1 \times 10^{-16} \text{ cm}) \left(\frac{0,3 \text{ ou } 2 \times 10^{-3}}{10^6} \right)^{1/2} = \begin{cases} 6 \times 10^{-20} \text{ cm} & = 6 \times 10^{-22} \text{ m} \\ \text{ou} \\ 5 \times 10^{-21} \text{ cm} & = 5 \times 10^{-23} \text{ m} \end{cases}$$

3. effet des ondes [équation 37.1] :

$$|\Delta B_0^{GW}| = \left(\frac{2 \times 4 \times 10^{-3} \times 10^{-21} \text{ ergs}}{10^6 \times 10^8 \text{ s}^{-2}} \right)^{1/2} = 3 \times 10^{-19} \text{ cm} = 3 \times 10^{-21} \text{ m}$$

4. conclusion : les ondes gravitationnelles issues d'une explosion de supernova dans le groupe de galaxies virgo sont détectables, si on peut construire un "senseur" pour mesurer les changements dans les amplitudes de vibration de magnitude $\lesssim 10^{-19} \text{cm}$ sur une échelle de temps $\lesssim 0,1 \text{s}$. et si on peut construire un détecteur avec les caractéristiques du dessus.

a. pour la durée des ondes issues d'une explosion de supernova, deux échelles de temps apparaissent comme pertinentes : (1) le temps nécessaire pour les étapes finales de l'effondrement du cœur d'une naine blanche en une étoile à neutron ou en crêpe d'étoile à neutron, $\tau \sim (\text{dimensions de l'étoile à neutron}) / (\text{vitesse du son dans la matière nucléaire}) \sim 2 \times 10^{-3} \text{s}$ ("impulsion de radiation gravitationnelle"); et (2) le temps nécessaire pour une étoile à neutron vibrante pour perdre son énergie de vibration par radiation gravitationnelle ("train d'ondes amorti"), $au \sim 0,3 \text{s}$.

Neuvième partie

**TESTS EXPERIMENTAUX DE LA
RELATIVITE GENERALE**

Chapitre 38

Tester les fondations de la relativité

- 38.1 tester est plus facile dans le système solaire que dans l'espace lointain
- 38.2 cadre théorique pour l'analyse de tests de la relativité générale
- 38.3 test du principe de singularité de la chute libre : expérience d'Eötvös-Dicke
- 38.4 tests pour l'existence d'une métrique gouvernant les mesures de longueur et de temps
- 38.5 tests du déplacement géodésique : expériences gravitationnelles de déplacement vers le rouge
- 38.6 tests du principe d'équivalence
- 38.7 tests pour l'existence de champs inconnus à longue portée

Chapitre 39

Autres théories de la gravité et l'approximation post newtonienne

- 39.1 autres théories
- 39.2 théories métriques de la gravité
- 39.3 limites post-newtoniennes et formalisme PPN
- 39.4 système de coordonnées PPN
- 39.5 description de la matière dans le système solaire
- 39.6 nature de l'expansion post-newtonienne
- 39.7 approximation newtonienne
- 39.8 coefficients métriques PPN
- 39.9 vitesse des coordonnées PPN relatif au "référentiel au repos universel"
- 39.10 tenseur stress-énergie PPN
- 39.11 équations du mouvement PPN
- 39.12 relations des coordonnées PPN à l'univers entourant
- 39.13 résumé du formalisme PPN

[..]

exercice 39.1 système de plusieurs corps dans la limite post-newtonienne de la relativité générale

boîte 39.1 résumé du formalisme PPN

- I variables
- II équations gouvernant l'évolution de ces variables
- III quantités à calculer à partir de ces variables
- IV relation entre le référentiel au repos, coordonnées PPN, et l'univers

boîte 39.2 paramètres PPN utilisés dans la littérature : un guide de traduction

- A table de traduction
- B signification des paramètres révisés

[..]

Chapitre 40

Expérimentation dans le système solaire

40.1 plusieurs expériences ouvert pour distinguer la relativité générale des théories métriques proposées de ma gravité

[..]

exercice 40.1 métrique PPN pour un soleil idéalisé

40.2 l'utilisation de rayons lumineux et d'ondes radio pour tester la gravité

40.3 déviation de la "lumière"

exercice 40.2 trajectoire des rayons lumineux dans le champ gravitationnel du soleil

40.4 délai temporel dans la propagation radar

[..]

boîte 40.1 déflexion de la lumière et des ondes radios par le soleil : résultats expérimentaux

[..]

exercice 40.3 principe de Fermat

[..]

- 40.5 déplacement du périhélie et perturbations périodiques pour les orbites géodésiques**
- 40.6 effets à trois corps dans l'orbite lunaire**
- 40.7 le dragging des référentiels inertiels**
- 40.8 la constante gravitationnelle est-elle constante ?**
- 40.9 Est-ce que les planètes et le soleil se déplacent sur des géodésiques ?**

Est cruciale aux expérimentations du système solaire la question de savoir si le soleil et les planètes se déplacent sur des géodésiques de l'espace-temps. Cette question est compliquée par les contributions à la courbe de l'espace-temps faites par le corps se déplaçant lui-même.

Pour élucider la question, - et pour obtenir une réponse dans la structure de la relativité générale - considérons un argument du type "ascenseur d'Einstein". L'objet astronomique en considération a une frontière extérieure, et chaque point de cette frontière décrit une ligne d'univers. Ces lignes d'univers définissent un tube d'univers. Une certaine distance en dehors de ce tube d'univers construit une "zone tampon" comme en ???. Adaptons ses dimensions intérieures et extérieures, selon la masse et les moments de l'objet et la courbe de l'espace enveloppant ("la puissance de la force produisant la marée du champ gravitationnel externe"), de telle façon que l'écart ε (cf.??) de la métrique depuis le plat dans cette zone tampon prend des valeurs égales à au plus deux fois la valeur extrême atteignable $\varepsilon_{\text{extreme}}$ (un minimum en fonction des variations en r , un maximum en fonction des variations en direction; en d'autres termes, un minimax). Ainsi en dehors des erreurs d'ordre $\varepsilon_{\text{extreme}}$, l'objet peut être vu comme se déplaçant dans un espace plat asymptotique. La loi de conservation du 4-moment total s'applique. Cela assure que l'objet se déplace sur une ligne (localement) droite avec une vitesse uniforme. Considérons, ensuite, que géométrie d'arrière plan qui est en accord juste en dehors de la zone tampon avec une géométrie actuelle de précision $\varepsilon_{\text{extreme}}$ ou mieux, mais avec laquelle, à l'intérieur on a la solution sans source des équations de champ d'Einstein. Ensuite, à une précision gouvernée par la magnitude de $\varepsilon_{\text{extreme}}$, la ligne localement droite le long de laquelle l'objet astronomique se déplace, sera une géodésique de cette géométrie d'arrière plan.

Dans la mesure où on peut donner une signification bien définie du écart du déplacement actuel de cette géodésique (une tâche compliquée par le fait que la géométrie d'arrière plan n'existe pas réellement!) on peut calculer ce écart en faisant usage du formalisme PPN ou un autre schéma approximatif [voir par ex. [16]].

Cette déviation provient ordinairement dans une mesure substantiel, et parfois presque entièrement, d'un couplage entre le tenseur de courbure de Riemann du champ externe et des moments multipolaires de l'objet astronomique (le moment angulaire est associé avec la rotation; les moments quadrupolaires et plus grands le sont avec la déformation; voir par ex les exercices 40.8 et 16.4). Ce couplage est important pour le système terre-lune, mais on a pas besoin de la relativité pour le calculer; la théorie newtonienne fais le travail à une précision beaucoup plus grande que nécessaire - ou devrait, si on comprend suffisamment bien l'intérieur de la terre et de la lune! Pour les planètes et le soleil, l'effet est négligeable. (exercice: utiliser la théorie newtonienne pour le prouver!). Ainsi, quand on applique la relativité générale au système solaire, on peut approximer l'orbite du soleil, le centre de masse du système terre-lune, et, et chaque autre planète, à une géodésique de "cette géométrie d'espace-temps de l'arrière plan" qui existerait si ses propres effets de courbure étaient absents. C'est l'approche utilisée pour analyser l'avance du périhélie des planètes au ??? dans le contexte de la relativité générale, et pour dériver dans l'exercice 39.15 "les équations post-newtoniennes de déplacement de plusieurs corps".

Dans la plupart des autres théories métriques de la gravité, en incluant la théorie de Dicke-Brans-Jordan, il y a des écarts substantiels depuis le déplacement géodésique. L'argument de "l'ascenseur d'Einstein" rate dans ces théories parce que l'espace-temps est doté non seulement d'une métrique, mais aussi d'un champ à longue portée qui couples indirectement aux corps massifs gravitants (voir ?? et ??).

Ce phénomène est bien compris en termes d'argument de Dicke sur l'influence des variations spatiales des constantes fondamentales sur les expériences de type Eötvös-Dicke (voir ??). Dans une théorie où la constante gravitationnelle de Cavendish G_C dépend de la position (ce qu'elle n'est pas en relativité générale et ne peut pas être), un corps avec une énergie autogravitationnelle significative E_{grav} doit tomber dans un champ gravitationnel newtonien externe parfaitement uniforme , avec une accélération anormale :

$$\left(\begin{array}{c} \text{accélération} \\ \text{d'un corps massif} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{accélération} \\ \text{d'un corps de test} \end{array} \right) = \frac{1}{M} \left(\frac{\partial E_{grav}}{\partial G_C} \right) \nabla G_C = \frac{E_{grav}}{M G_C} \nabla G_C \quad (40.1)$$

[voir équation ??]. Dans une théorie de Dicke-Brans-Jordan, G_C est essentiellement la réciproque du champ scalaire ; et il contient une petite part qui est proportionnelle au potentiel newtonien, U [équation (??) avec les valeurs appropriées des paramètres de la boîte ??]. Comme résultat, le soleil tombe avec une accélération plus petite d'une part sur un million que l'accélération d'un corps test ; Jupiter tombe avec une accélération plus petite d'une part sur un milliard ; et la terre, plus petit d'une part sur 10^{10} . Traduit en terme de langage relativiste, le champ scalaire, en influençant l'auto énergie gravitationnelle d'un corps massif, produit des déviations du déplacement géodésique.

On peut utiliser le formalisme entièrement PPN du chapitre 29 pour calculer le déplacement des corps massifs dans n'importe quelle théorie métrique de la gravité. [1] et [18] ont fait cela. Ils ont trouvé qu'un corps massif au repos dans un champ externe uniforme expérimente une accélération PPN (du type newtonien) donné par

$$\frac{d^2 x_j}{dt^2} = E_{jk} \frac{\partial U}{\partial x_k}$$

où E_{jk} est une quantité dépendant de la structure du corps :

$$\begin{aligned} E_{jk} &= \delta_{jk} \left\{ 1 - (7\Delta_1 - 3\gamma - 4\beta) \frac{E_{grav}}{m} \right\} - (2\beta + 2\beta_2 - 3\gamma + \Delta_2 - 2) \frac{\Omega_{jk}}{m} \\ \Omega_{jk} &= -\frac{1}{2} \int \frac{\rho_0 \rho'_0 (x_j - x'_j)(x_k - x'_k)}{|x - x'|^3} d^3 x d^3 x' \\ E_{grav} &= \sum \Omega_{jj} \end{aligned} \quad (40.2)$$

Ici m est l'énergie de masse totale du corps, Ω_{jk} est "le tenseur énergie potentiel de Chandrasekhar", et E_{grav} est l'énergie autogravitationnelle du corps. [note : la méthode de calcul de Dicke pour calculer l'accélération anormale (40.54) échoue dans les théories qui ne sont pas "conservatives" (boîte ??).]

En relativité générale, les combinaisons des coefficients de PPN dans E_{jk} disparaissent ; donc $E_{jk} = \delta_{jk}$, et le corps tombe avec l'accélération habituelle - càd il se déplace le long d'une géodésique. Mais dans la plupart des autres théories de la gravité, $E_{jk} \neq \delta_{jk}$; le corps ne se déplace pas sur une géodésique ; et son accélération peut même être dans une direction différente du gradient du potentiel newtonien !

Cet écart prédit depuis le déplacement géodésique est appelé "l'effet Nordtvedt". La possibilité d'un tel effet fut noté en premier en passant par Dicke [5] mais fut découverte indépendamment et exploré en grand détail par Nordtvedt [12] , [1]

L'effet Nordtvedt dans une théorie autre que la relativité générale produit un nombre de phénomènes dans le système solaire qui sont potentiellement observables. [voir [2]] pour une énumération et les références.] L'effet le plus approprié pour un test est une "polarisation" de l'orbite terre-lune due au fait que la lune devrait tomber vers le soleil avec une accélération plus grande que le fait la terre. Cette "polarisation" résulte en une excentricité dans l'orbite qui pointe toujours vers le soleil et a l'amplitude

$$\delta r = 840 \left[3\gamma + 4\beta - 7\Delta_1 - \frac{1}{3}(2\beta + 2\beta_2 - 3\gamma + \Delta_2 - 2) \right] cm \quad (40.3)$$

$$\begin{aligned}\delta r &= 67 \text{ mètres} && \text{dans la théorie de Ni (boîtes ?? et ??)} \\ &= \frac{8,4}{2+\omega} \text{ mètres} && \text{dans la théorie de Dicke-Brans-Jordan (boîtes ?? et ??)} \\ &= 0 && \text{dans la théorie d'Einstein}\end{aligned}$$

40.10 résumé des tests expérimentaux sur la relativité générale

Dixième partie

FRONTIERES

Chapitre 41

Spineurs

41.1 réflexions, rotations, et la combinaison de rotations

Les spineurs et leurs applications en relativité?? l'analyse des "rotations", d'abord dans l'espace, puis dans l'espace-temps. Prenez un cube. (figure 41.1). Tournez le de 90° autour d'un axe. Puis prenez un autre axe à angle droit du premier. Tournez le cube de 90° autour du lui. De cette façon le cube est amené de l'orientation marquée "initial" à celle marquée "finale". Comment peut-on faire cette transformation nette en un seul pas, avec une seule rotation? En d'autres mots, quelle est la loi pour la combinaison de rotations?

? ?Si les rotations étaient décrites par des vecteurs, alors on pourrait appliquer la loi de combinaison des vecteurs. La résultante de deux vecteurs de la même amplitude (90°) séparés un angle droit, est un simple vecteur qui (1) est dans le même plan et (2) a la magnitude $2^{1/2} \times 90^\circ = 127,28^\circ$. Les deux descriptions sont fausses. Pour tourner le cube d'une orientation initiale à une orientation finale en un seul tour, (1) prend un axe courant depuis le centre à travers le point A et (2) tourne de 120° .

Quel algorithme de calcul sera jamais capable de reproduire une loi de combinaison de rotations apparemment si étrange? Le soir du 16 octobre 1843, William Rowan Hamilton marchait avec sa femme le long du canal royal à Dublin quand la réponse lui a sauté dans l'esprit?? [..] les formules ¹

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

ce qui donne, en notation actuelle ,

$$\sigma_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = i\mathbf{i}, \quad \sigma_y = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix} = i\mathbf{j}, \quad \sigma_z = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = i\mathbf{k}, \quad (41.1)$$

prend la forme

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = 1 \\ \sigma_x\sigma_y &= -\sigma_y\sigma_x = i\sigma_z \text{ et permutations cycliques} \end{aligned} \quad (41.2)$$

A toute rotation est associée une quantité ("quaternion" d'Hamilton; "matrice de spin" ou "transformation de spineur" ou "opérateur de rotation").

$$R = \cos(\theta/2) - i\sin(\theta/2)(\sigma_x\cos\alpha + \sigma_y\cos\beta + \sigma_z\cos\gamma) \quad (41.3)$$

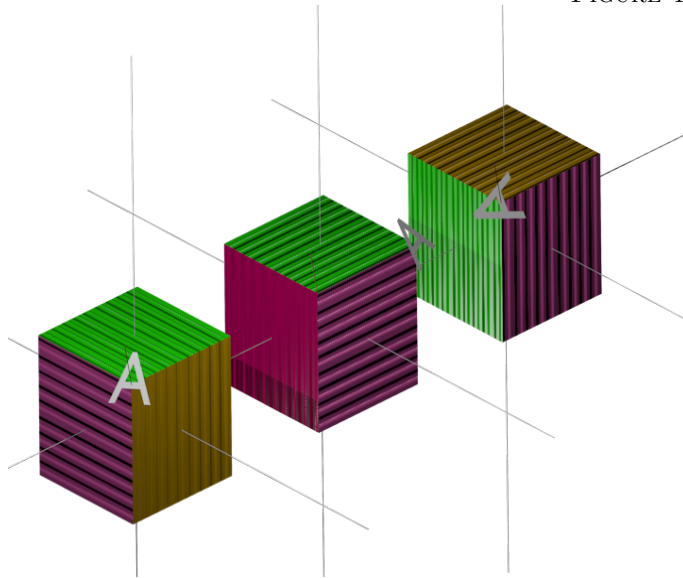
où θ est l'angle de rotation et α, β, γ sont les angles entre les axes de rotation et les axes de coordonnées. Une rotation décrite par R_1 suivie par une rotation décrite par R_2 donne un change net en orientation décrit par la seule rotation

$$R_3 = R_2R_1 \quad (41.4)$$

C'est la formule d'Hamilton pour la combinaison de deux rotations (des pas vers elle faits par Euler en 1776; obtenue par Gauss en 1819 mais jamais publiée par lui)

1. Dans la même ville, le 21 juin 1972 le président Eamon Valera dit à un des auteurs que, alors qu'étant en prison en 1916, programmé pour être tué le lendemain matin, il écrivit la formule qu'il adorait, $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$

FIGURE 41.1 –



Vidéo des rotations :

fichier blender :



La rotation autour de l'axe vertical de 90° , suivi par la rotation autour de l'axe horizontal de 90° , donne un changement net en orientation qui peut être obtenu par une seule rotation de 120° autour d'un axe qui émerge du centre jusqu'au point A.

Dans l'exemple de la figure 41.1,

$$R_1(\text{rotation de } \theta = 90^\circ \text{ autour de l'axe } z) = (1 - i\sigma_z)/2^{1/2}$$

$$R_2(\text{rotation de } \theta = 90^\circ \text{ autour de l'axe } x) = (1 - i\sigma_x)/2^{1/2}$$

et le produit des deux est

$$R_2R_1 = (1 - i\sigma_x + i\sigma_y - i\sigma_z)/2 = \cos 60^\circ - i\sin 60^\circ(\sigma_x/3^{1/2} - \sigma_y/3^{1/2} + \sigma_z/3^{1/2})$$

[..]

FIGURE 41.2 –

[..]

exercice 41.1 caractéristiques élémentaires de la matrice rotation

[..]

exercice 41.2 matrice rotation a 1 comme déterminant

[..]

41.2 rotations infinitésimales

[.] ou

$$R = 1 - (i d\theta/2)(\sigma \cdot \mathbf{n}) \quad (41.5)$$

[.]

$$X \leftarrow X' = R X R^* \quad (41.6)$$

[.]

$$x' = [1 + (d\theta)\mathbf{n} \times] x \quad (41.7)$$

[.]

$$R(d\theta) = e^{-(i d\theta/2)(\sigma \cdot \mathbf{n})} \quad (41.8)$$

[.]

$$R(\theta) = e^{-i(\theta/2)(\sigma \cdot \mathbf{n})} \quad (41.9)$$

[.]

$$\begin{aligned} R(\theta) &= \sum_{p=0}^{\infty} (1/p!) (-i\theta \sigma \cdot \mathbf{n}/2)^p \\ &= \sum_{p \text{ paire}} (1/p!) (-i\theta/2)^p + (\sigma \cdot \mathbf{n}) \sum_{p \text{ impaire}} (1/p!) (-i\theta/2)^p \\ &= \cos(\theta/2) - i \sin(\theta/2)(\sigma \cdot \mathbf{n}) \end{aligned} \quad (41.10)$$

[.]

$$X' = R X R^* \quad (41.11)$$

exercice 41.3 plus de propriétés de la matrice rotation

Montrez que pour $X = x \cdot \sigma$ on a la relation de commutation

$$[(\sigma \cdot \mathbf{n}), X] = 2i(\mathbf{n} \times x) \cdot \sigma$$

Utilisez le pour obtenir, à partir de l'équation (??) sous la forme $X = R X_0 R^*$ [où X_0 est une constante, alors que $R(\theta)$ est donné par l'équation (??)], la formule

$$\frac{d}{d\theta}(x \cdot \sigma) = (\mathbf{n} \times x) \cdot \sigma$$

qui est équivalent à la définition standard

$$\frac{dx}{dt} = \omega \times x$$

pour la vitesse angulaire ? Renversez l'argument pour montrer que l'équation (41.7') définit correctement la rotation $R(t)$ résultant d'une vitesse angulaire dépendant du temps $\omega(t)$, même si la solution simple $R = \exp[-\frac{1}{2}t(\sigma \cdot \omega)]$ de cette équation ne peut plus être écrite quand ω est non constant.

41.3 transformation de Lorentz via l'algèbre de spineur

[.]

41.4 precession de thomas via l'algèbre de spineurs

[.]

FIGURE 41.3 –

[.]

41.5 spineurs**41.6 correspondance entre les vecteurs et les spineurs****41.7 algèbre de spineur**

[.]

$$T_{A\dot{U}}{}^{B\dot{V}C\dot{W}} = \sigma^\alpha{}_{A\dot{U}} \sigma^\beta{}_{B\dot{V}} \sigma^\gamma{}_{C\dot{W}} T_\alpha{}^{\beta\gamma} \quad (41.12)$$

et la relation inverse

$$T_\alpha{}^{\beta\gamma} = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \sigma_\alpha{}^{A\dot{U}} \sigma^\beta{}_{B\dot{V}} \sigma^\gamma{}_{C\dot{W}} T_{A\dot{U}}{}^{B\dot{V}C\dot{W}} \quad (41.13)$$

[.]

boîte 41.1 titre

[.]

41.8 espace de spin et ses spineurs de base

FIGURE 41.4 –

[.]

41.9 le spineur vu en tant que ???

[.]

41.10 apparence du ciel de nuit : une application des spineurs

[.] [.]

FIGURE 41.5 –

[.]

41.11 les spineurs comme un outil puissant de la théorie de la gravitation

Chapitre 42

Calcul de Regge ? ?

42.1 pourquoi le calcul de Regge

42.2 calcul de regg en bref

42.3 simplexes et angles deficit ? ?

42.4 forme du squelette des équations de champ

42.5 le choix de la structure lattice

42.6 le choix des logueurs des côtés

42.7 applications passées du calcul de Regge

42.8 le future du calcul de regge

Chapitre 43

Superespace : arène pour la dynamique de la géométrie ??

43.1 espace, superespace, et espace-temps distingués

43.2 la dynamique de la géométrie décrite dans le langage du super-espace du ??

(43.1)

(43.2)

(43.3)

(43.4)

(43.5)

43.3 l'équation d'Einstein-Hamilton-Jacobi

[..]

$$I_{Hilbert} = (1/16\pi) \int^{(4)} R(-g)^{1/2} d^4x = extremum \quad (43.6)$$

[..]

$$(1/16\pi)I_{ADM} = I_{vraie} = (1/16\pi) \int \left\{ \pi^{ij} \partial g_{ij} / \partial t + N g^{1/2} R + N g^{-1/2} \left[\frac{1}{2} (Tr\pi)^2 - Tr(\pi^2) \right] + 2N_i \pi^i_j \right\} d^4x \quad (43.7)$$

(43.8)

(43.9)

$$S(g(x, y, z)) = I_{ADM, extremal} = \int_{g'_{ij}}^{g_{ij}} \{ \pi^{ij} \partial g_{ij} / \partial t \} d^4x \quad (43.10)$$

(43.11)

(43.12)

(43.14)

(43.15)

(43.16)

(43.17)

(43.18)

(43.19)

(43.20)

(43.21)

(43.22)

(43.23)

$$\Delta x \sim (\hbar/m\omega)^{1/2} \quad (43.24)$$

Le champ électromagnétique peut être traité comme une collection infinie "d'oscillateurs de champ" indépendants, d'amplitudes ξ_1, ξ_2, \dots . Quand le champ de Maxwell est dans un état de plus basse énergie, l'amplitude de probabilité - pour le premier oscillateur d'amplitude ξ_1 , et simultanément les second oscillateur d'amplitude ξ_2 , le troisième ξ_3 et ainsi de suite - est le produit de fonctions de la forme (??), un pour chaque oscillateur. Quand l'échelle d'amplitudes pour chaque oscillateur est convenablement normalisé, le produit infini résultant prend la forme

$$\Psi(\xi_1, \xi_2, \dots) = N \exp[-(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots)] \quad (43.25)$$

Cette expression donne l'amplitude de probabilité Ψ pour une configuration $\mathbf{B}(x, y, z)$ du champ magnétique qui est décrit par les coefficients de Fourier ξ_1, ξ_2, \dots . On peut oublier ?? tout mention des coefficients de Fourier si on veut, cependant, et réécrire (??) directement en terme de configuration de champ magnétique lui-même [[17]] :

$$\Psi(\mathbf{B}(x, y, z)) = N \exp\left(-\int \int \frac{\mathbf{B}(\mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{B}(\mathbf{x}_2)}{16\pi^3 \hbar c r_{12}^2} d^3x_1 d^3x_2\right) \quad (43.26)$$

On ne parle plus "du" champ magnétique , mais plutôt de la probabilité de celui-ci [..]

exercice 43.1 L'action pour l'oscillateur harmonique

L'énergie cinétique est $\frac{1}{2}m(dx/dt)^2$ et l'énergie potentielle est $\frac{1}{2}m\omega^2 x^2$.

43.4 fluctuations en géométrie

Chapitre 44

Au delà de la fin du temps

- 44.1 l'effondrement gravitationnel comme la plus grande crise en physique pour tous les temps
- 44.2 évaluation de la théorie qui prédit l'effondrement
- 44.3 fluctuations du vide : leur prévalence et la domination finale
- 44.4 pas de géométrie, mais une prégéométrie, comme le matériau de construction magique
- 44.5 prégéométrie comme le calcul des propositions
- 44.6 la boîte noire : le retraitement de l'univers

Bibliographie

- [1]
- [2]
- [3] Choquet-Bruhat. 1968.
- [4] deRham. 1955.
- [5] Dicke. 1964.
- [6] E.Cartan. 1945.
- [7] Flanders. 1963.
- [8] Hauser. 1970.
- [9] HCartan. 1970.
- [10] Israel. 1970.
- [11] NickersonSpencerSteenrod. 1959.
- [12] Nordtvedt. 1968.
- [13] PressandThorne. 1972.
- [14] Schilpp. 1949.
- [15] Spivak. aaaaa. 1965. dsqdqsd.
- [16] A. Taub. équations du déplacement de particules test. 1965.
- [17] Wheeler. 1962.
- [18] Will. 1971.